RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1904.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

Nella mia Nota precedente [2], partendo da considerazioni di geometria ellittica, ho dimostrato il teorema:

Fissata una qualunque rappresentazione equivalente della sfera sopra sè stessa, esistono infinite coppie di superficie applicabili (dipendenti da due funzioni arbitrarie), che hanno per immagini di Gauss quelle due date figure sferiche equivalenti. La ricerca di queste coppie dipende dall'integrazione di un'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine.

Scopo della prima parte della presente Nota è di rendere quella dimostrazione indipendente dalla geometria ellittica e di presentare inoltre sotto la sua forma più generale l'equazione a derivate parziali da cui dipende il problema.

In secondo luogo mi occuperò nuovamente della ricerca di quelle coppie di superficie applicabili per le quali alle assintotiche dell'una superficie corrisponde un sistema coniugato sull'altra e dimostrerò direttamente, fondandomi sulla teoria delle deformazioni infinitesime, che queste superficie sono tutte e sole le *associate* delle superficie applicabili sulla sfera. Si vedrà in fine che le superficie in discorso ammettono una deformazione continua ad

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

(2) Seduta del 5 gennaio 1904.

un parametro che non ne altera il carattere; questa corrisponde alla trasformazione di Lie-Bonnet per le superficie associate di curvatura costante positiva.

1. Abbiasi una rappresentazione qualunque equivalente (che conservi le aree) della sfera di raggio $= 1$ sopra sè stessa. Riferiamo le due figure sferiche a due sistemi coordinati (u, v) *corrispondenti*, e siano

$$(1) \qquad \begin{cases} ds^2_1 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ \overline{ds}^2_1 = \overline{e}\,du^2 + 2\overline{f}\,du\,dv + \overline{g}\,dv^2 \end{cases}$$

le espressioni dei rispettivi elementi lineari delle due figure; a causa della conservazione delle aree sarà

$$eg - f^2 = \overline{e}\,\overline{g} - \overline{f}^2,$$

e porremo

$$(2) \qquad \Delta = eg - f^2 = \overline{e}\,\overline{g} - \overline{f}^2.$$

Indicando con $P, \overline{P}$ due punti qualunque corrispondenti delle due figure e con

$$X_3, Y_3, Z_3$$
$$\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$$

le loro rispettive coordinate, leghiamo alla prima figura un triedro triretangolo

$$(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, 3$$

col vertice in P il cui terzo spigolo è la normale alla sfera, e alla seconda figura colleghiamo analogamente il triedro:

$$(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Se p, q, r; p_1, q_1, r_1 denotano le rotazioni del primo triedro, sussisteranno le formole fondamentali:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = r\,X_2 - q\,X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = p\,X_3 - r\,X_1\,, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = q\,X_1 - p\,X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = r_1 X_2 - q_1 X_3\,, \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = p_1 X_3 - r_1 X_1\,, \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = q_1 X_1 - p_1 X_2\,, \end{cases}$$

e le rotazioni saranno legate dalle relazioni caratteristiche:

$$(4) \qquad \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - q_1 r\,, \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - r_1 p\,,$$
$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - p_1 q\,.$$

Per il secondo triedro indicheremo le rotazioni con

$$\bar{p}\,,\ \bar{q}\,,\ \bar{r}\ ;\ \bar{p}_1\,,\ \bar{q}_1\,,\ \bar{r}_1$$

ed avremo formole perfettamente analoghe alle (3), (4).

Ora diciamo che, scegliendo in modo opportuno la giacitura relativa dei due triedri

$$(X_i\,,\ Y_i\,,\ Z_i)\ ,\ (\bar{X}_i\,,\ \bar{Y}_i\,,\ \bar{Z}_i),$$

possiamo rendere

$$\bar{r} = r\ ,\ \bar{r}_1 = r_1\,. \tag{5}$$

Per ciò (ripetendo quanto è esposto al n. 4 della Nota precedente) osserviamo che se $\varphi\,,\ \bar{\varphi}$ indicano le rispettive inclinazioni delle direzioni

$$(X_1\,,\ Y_1\,,\ Z_1)\ ,\ (\bar{X}_1\,,\ \bar{Y}_1\,,\ \bar{Z}_1)$$

sulle linee $v = \text{cost}$ delle due figure sferiche; si hanno le formole [1]:

$$\begin{cases} r = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\ r_1 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \bar{r} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}} - \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\ ,\ \bar{r}_1 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}} - \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial v}\,, \end{cases}$$

i simboli di Christoffel $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ riferendosi al ds_1 e gli altri $\overline{\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}}$, $\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}$ al $\bar{ds}_1$.

Per soddisfare le (5) basta dunque legare $\varphi\,,\ \bar{\varphi}$ fra loro per modo che sia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}} \\ \dfrac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Ora, essendo $= +1$ la curvatura di ambedue le forme differenziali (2), si ha [2]:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\bar{e}}\overline{\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}}\right] = \sqrt{\Delta}\,.$$

[1] V. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 181.

[2] *Lezioni*, vol. I, pag. 77, formola (V).

onde segue che scelta $\overline{\varphi}$ ad arbitrio nelle (6), p. e. $\overline{\varphi} = 0$, le (6) sono compatibili e dànno φ con una quadratura che introduce una costante arbitraria.

Possiamo dunque supporre, e supporremo, la giacitura dei due triedri scelta in guisa che le (5) siano soddisfatte.

2. Cerchiamo ora di determinare quattro funzioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ di u, v tali che risultino contemporaneamente differenziali esatti le espressioni

$$(\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv$$
$$(\xi \overline{X}_1 + \eta \overline{X}_2)\, du + (\xi_1 \overline{X}_1 + \eta_1 \overline{X}_2)\, dv$$

e le altre che se ne deducono cangiando le lettere $X, \overline{X}$ in $Y, \overline{Y}$, poi in $Z, \overline{Z}$. Se ciò è possibile e poniamo:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \int (\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv, \\ y = \int (\xi Y_1 + \eta Y_2)\, du + (\xi_1 Y_1 + \eta_1 Y_2)\, dv, \\ z = \int (\xi Z_1 + \eta Z_2)\, du + (\xi_1 Z_1 + \eta_1 Z_2)\, dv; \end{cases}$$

$$(7^*) \qquad \begin{cases} \overline{x} = \int (\xi \overline{X}_1 + \eta \overline{X}_2)\, du + (\xi_1 \overline{X}_1 + \eta_1 \overline{X}_2)\, dv, \\ \overline{y} = \int (\xi \overline{Y}_1 + \eta \overline{Y}_2)\, du + (\xi_1 \overline{Y}_1 + \eta_1 \overline{Y}_2)\, dv, \\ \overline{z} = \int (\xi \overline{Z}_1 + \eta \overline{Z}_2)\, du + (\xi_1 \overline{Z}_1 + (\eta_1 \overline{Z}_2)\, dv; \end{cases}$$

i due punti (x, y, z), $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ descriveranno due superficie $S, \overline{S}$ collo stesso elemento lineare

$$(8) \qquad ds^1 = (\xi^2 + \eta^2)\, du^2 + 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1)\, du\, dv + (\xi^2_1 + \eta^2_1)\, dv^2,$$

e quindi applicabili l'una sull'altra; inoltre $S, \overline{S}$ avranno per immagini sferiche precisamente le due figure date.

Ora le condizioni d'integrabilità per le (7) si traducono nelle tre equazioni seguenti cui debbono soddisfare le quattro traslazioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 181)

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1 r - \xi r_1, \end{cases}$$

$$(10) \qquad \eta p_1 - \xi q_1 + \xi_1 q - \eta_1 p = 0.$$

Le condizioni d'integrabilità per le (7*) sono perfettamente analoghe alle precedenti; ma poichè le rotazioni r, r_1 conservano secondo le (5) il medesimo valore pel secondo triedro, le equazioni (9) restano inalterate mentre la (10) diventa

$$\eta \bar{p}_1 - \xi \bar{q}_1 + \xi_1 \bar{q} - \eta_1 \bar{p} = 0 . \tag{10*}$$

Le quattro funzioni incognite ξ, η ; ξ_1, η_1 debbono dunque unicamente soddisfare il sistema lineare delle quattro equazioni (9), (10), (10*). Segue già di qui l'esistenza di infinite coppie di superficie applicabili, coll'assegnata rappresentazione sferica; ma noi vogliamo ora trasformare questo sistema lineare in un'unica equazione lineare del 2° ordine per una sola funzione incognita.

3. Per ottenere l'indicata trasformazione basta definire la superficie S in coordinate tangenziali

$$(X_3, Y_3, Z_3; W),$$

indicando W la distanza del piano tangente di S dall'origine, ed esprimere per mezzo di W e delle sue derivate prime e seconde le rotazioni $p, q ; p_1, q_1$. A tale scopo partiamo dalle formole di Weingarten [1]

$$x = W X_3 + \mathcal{F}(W, X_3), \tag{11}$$

dove il parametro differenziale misto $\mathcal{F}(W, X_3)$ si intende calcolato rispetto al ds^2_1 sferico dato dalla prima delle (1). Conviene ora calcolare dalle (11) le derivate $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ come segue.

Derivando rapporto ad u, v le identità

$$\Sigma \mathcal{F}(W, X_3) \cdot \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}, \Sigma \mathcal{F}(W, X_3) \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v} , \tag{12}$$

si hanno in primo luogo le formole

$$\begin{cases} \Sigma \dfrac{\partial \mathcal{F}(W, X_3)}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = W_{11} , \ \Sigma \dfrac{\partial \mathcal{F}(W, X_3)}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = W_{12} \\ \Sigma \dfrac{\partial \mathcal{F}(W, X_3)}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = W_{12} , \ \Sigma \dfrac{\partial \mathcal{F}(W, X_3)}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = W_{22} , \end{cases} \tag{13}$$

indicando con W_{rs} le derivate seconde covarianti di W rispetto al ds^2_1.

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 172.

Se in queste poniamo per $\frac{\partial X_3}{\partial u}, \frac{\partial X_3}{\partial v}$ i valori $qX_1 - pX_2$, $q_1X_1 - p_1X_2$ dati dalle (3) e ricordiamo che si ha

$$pq_1 - p_1q = \sqrt{eg - f^2} = \sqrt{\Delta},$$

risolvendo ne deduciamo le altre:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{pW_{12} - p_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{qW_{12} - q_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\Sigma X_1 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{pW_{22} - p_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{qW_{22} - q_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Associando a queste le identità

$$\Sigma X_3 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad \Sigma X_3 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v},$$

che seguono dalla

$$\Sigma X_3 F(W, X_3) = 0$$

derivando rapporto ad u, v con riguardo alle (12), otteniamo in fine, risolvendo rapporto a

$$\frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u}, \quad \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v},$$

le formole

$$\begin{cases} \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{pW_{12} - p_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} X_1 + \frac{qW_{12} - q_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} X_2 - \frac{\partial W}{\partial u} X_3 \\ \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{pW_{22} - p_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} X_1 + \frac{qW_{22} - q_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} X_2 - \frac{\partial W}{\partial v} X_3. \end{cases}$$

Da queste, derivando le (11) rapporto ad u, v, troviamo

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{pW_{12} - p_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} + qW\right) X_1 + \left(\frac{qW_{12} - q_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} - pW\right) X_2 \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \left(\frac{pW_{22} - p_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} + q_1W\right) X_1 + \left(\frac{qW_{22} - q_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} - p_1W\right) X_2 \end{cases}$$

e confrontando colle (7) ne deduciamo le espressioni cercate per le traslazioni:

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = \frac{pW_{12} - p_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} + qW, \quad \eta = \frac{qW_{12} - q_1W_{11}}{\sqrt{\Delta}} - pW \\ \xi_1 = \frac{pW_{22} - p_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} + q_1W, \quad \eta_1 = \frac{qW_{22} - q_1W_{12}}{\sqrt{\Delta}} - p_1W. \end{cases}$$

Siccome queste formole valgono per qualunque superficie S, è chiaro *a priori* che i valori (15) di $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ soddisferanno le (9), (10), qualunque sia la funzione W (1).

Ci rimarrà dunque solo da esprimere che con questi valori (15) di $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ anche la (10*) deve essere soddisfatta. Troviamo così per la funzione incognita W l'equazione lineare del 2° ordine:

$$(A) \qquad (p_1\bar{q}_1 - q_1\bar{p}_1)\,W_{11} + (q_1\bar{p} - p\bar{q}_1 + q\bar{p}_1 - p_1\bar{q})\,W_{12} + \\ + (p\bar{q} - q\bar{p})\,W_{22} + \sqrt{\Delta}(p_1\bar{p} + q_1\bar{q} - p\bar{p}_1 - q\bar{q}_1)\,W = 0.$$

È questa, sotto la sua forma più generale, l'equazione da cui dipende la ricerca delle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica.

Se per linee sferiche (u, v) prendiamo le linee (reali) isometriche della rappresentazione della sfera sopra sè stessa, l'equazione (A) assume la forma particolare (a) data al n° 2 della Nota precedente.

4. Alla dimostrazione del teorema fondamentale aggiungiamo le osservazioni seguenti:

Se per le due superficie applicabili S, $\bar{S}$ corrispondenti ad una soluzione nota W della equazione (A), indichiamo con

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \;,\; \bar{D}\,du^2 + 2\bar{D}'\,du\,dv + \bar{D}''\,dv^2$$

le due rispettive seconde forme quadratiche fondamentali, abbiamo le formole (2):

$$(16) \qquad \begin{cases} D = \eta p - \xi q \;,\; D' = \eta p_1 - \xi q_1 \\ D' = \eta_1 p - \xi_1 q \;,\; D'' = \eta_1 p_1 - \xi_1 q_1 \end{cases}$$

e le analoghe:

$$(16^*) \qquad \begin{cases} \bar{D} = \eta \bar{p} - \xi \bar{q} \;,\; \bar{D}' = \eta \bar{p}_1 - \xi \bar{q}_1 \\ \bar{D}' = \eta_1 \bar{p} - \xi_1 \bar{q} \;,\; \bar{D}'' = \eta_1 \bar{p}_1 - \xi_1 \bar{q}_1. \end{cases}$$

Se nelle (16) introduciamo per $\xi, \eta; \xi_1, \eta$, i valori (15) e ricordiamo che si ha:

$$p^2 + q^2 = e \;,\; pp_1 + qq_1 = f \;,\; p_1^2 + q_1^2 = g,$$

troviamo che esse si riducono alle note formole delle coordinate tangenziali (3):

$$-D = W_{11} + eW \;,\; -D' = W_{12} + fW \;,\; -D'' = W_{22} + gW.$$

(1) Del resto per la (10) tale verifica è immediata e per le (9) risulterebbe con qualche sviluppo di calcolo dalle identità:

$$e = p^2 + q^2, f = pp_1 + qq_1, g = p_1^2 + q_1^2.$$

(2) *Lezioni*, vol. II, pag. 183.

(3) *Lezioni*, vol. I, pag. 173.

Inversamente, confrontando queste colle (16), si trovano nuovamente le formole (15) dimostrate al n.° precedente.

Ora osserviamo che il sistema coniugato comune alle due superficie applicabili $S, \overline{S}$ è formato dalle linee integrali della equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & , & D'\,du + D''\,dv \\ \overline{D}\,du + \overline{D}'\,dv & , & \overline{D}'\,du + \overline{D}''\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

che a causa delle (16), (16*) si risolve nella seguente:

$$(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) \cdot \begin{vmatrix} p\,du + p_1\,dv & , & q\,du + q_1\,dv \\ \overline{p}\,du + \overline{p}_1\,dv & , & \overline{q}\,du + \overline{q}_1\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ma si ha $\xi\eta_1 - \eta\xi_1 \neq 0$, altrimenti $S, \overline{S}$ si ridurrebbero a curve; quindi l'immagine sferica del sistema coniugato comune è dato dalle linee integrali dell'equazione differenziale:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} p\,du + p_1\,dv & , & q\,du + q_1\,dv \\ \overline{p}\,du + \overline{p}_1\,dv & , & \overline{q}\,du + \overline{q}_1\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Questa dipende unicamente dalle immagini sferiche date, onde si vede che le infinite coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili date dalle soluzioni W della (A) hanno la medesima immagine sferica del sistema coniugato comune. Si ritrovano così completati, i teoremi di Peterson [1].

Osserviamo poi che se a linee coordinate (u, v) prendiamo quelle del sistema coniugato comune (supposto formato di linee reali e distinte) avremo

$$p\overline{q} - q\overline{p} = 0 \quad , \quad p_1\overline{q}_1 - q_1\overline{p}_1 = 0$$

e l'equazione (A) si ridurrà alla nota forma

$$W_{12} + fW = 0$$

da cui dipende la ricerca delle superficie che hanno il sistema sferico (u, v) per immagine di un sistema coniugato.

Si può ancora osservare che dalla forma lineare omogenea della (A) risulta che note due diverse coppie $(S, \overline{S})$ $(S', \overline{S}')$ di superficie applicabili colla medesima immagine sferica del sistema coniugato comune, se ne ottengono infinite altre colla costruzione seguente. Indicando con $M, \overline{M}$; $M', \overline{M}'$ quattro punti corrispondenti delle quattro superficie, si congiunga M con M', $\overline{M}$ con $\overline{M}'$

[1] *Lezioni*, vol. II, pag. 43.

e si dividano i segmenti MM', $\overline{M}\overline{M}'$ nei punti P, $\overline{P}$ nel medesimo rapporto costante. I punti P, $\overline{P}$ descriveranno un'altra coppia di superficie applicabili.

5. Veniamo ora alla ricerca particolare di quelle coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili tali che alle assintotiche di S corrisponda sopra $\overline{S}$ un sistema coniugato.

Per compiere questa ricerca direttamente conviene ricordare le formole fondamentali della teoria delle deformazioni infinitesime esposte nel § 31 del vol. II delle mie Lezioni. Essendo S una superficie qualunque, definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{cases}$$

si consideri una sua qualunque deformazione infinitesima nella quale i coefficienti D, D', D'' subiscono le variazioni

$$\delta D = \varepsilon \Gamma \quad , \quad \delta D' = \varepsilon \Gamma' \quad , \quad \delta D'' = \varepsilon \Gamma''$$

con ε costante infinitesima. Le funzioni Γ, Γ', Γ'' debbono per ciò soddisfare alle equazioni di Codazzi:

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \Gamma' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma'' = 0 \\ \dfrac{\partial \Gamma''}{\partial u} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \Gamma' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma'' = 0 \end{cases}$$

ed all'altra in termini finiti

$$(19) \qquad D\Gamma'' + D''\Gamma - 2D'\Gamma' = 0.$$

Viceversa ad ogni tale terna $(\Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ corrisponde una deformazione infinitesima di S.

Sia ora S_0 la superficie *associata* alla S nella deformazione infinitesima considerata, cioè quella superficie che corrisponde alla S per parallelismo delle normali per tal guisa che le assintotiche di S_0 corrispondano al sistema coniugato di S *permanente* nella deformazione infinitesima. Se indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile P sopra S e con x_0, y_0, z_0 quelle del punto P_0 corrispondente sull'associata, la S_0 si trova con quadrature dalle formole:

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

e dalle analoghe per y_0, z_0. Di qui pei coefficienti

$$E_0, F_0, G_0$$
$$D_0, D'_0, D''_0$$

della S_0 si traggono le altre

$$(21)\quad \begin{cases} E_0 = \dfrac{E\Gamma'^2 - 2F\Gamma\Gamma' + G\Gamma^2}{EG - F^2}, \quad F_0 = \dfrac{E\Gamma'\Gamma'' - F(\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2) + G\Gamma\Gamma'}{EG - F^2}, \\ \qquad\qquad G_0 = \dfrac{E\Gamma''^2 - 2F\Gamma'\Gamma'' + G\Gamma'^2}{EG - F^2} \\ D_0 = \dfrac{D\Gamma' - D'\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad D'_0 = \dfrac{D'\Gamma' - D''\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}} = \dfrac{D\Gamma'' - D'\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \qquad\qquad D''_0 = \dfrac{D'\Gamma'' - D''\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \end{cases}$$

e quindi con facile calcolo

$$E_0G_0 - F_0^2 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)^2}{EG - F^2}, \quad D_0D''_0 - D'^2_0 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)(DD'' - D'^2)}{EG - F^2},$$

da cui segue la formola importante pel nostro scopo

$$(22)\qquad K_0 = \frac{D_0D''_0 - D'^2_0}{E_0G_0 - F_0^2} = \frac{DD'' - D'^2}{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}$$

ove K_0 indica la curvatura assoluta di S_0.

6. Ciò premesso supponiamo che esista una deformazione *finita* della superficie S tale che sulla deformata $\overline{S}$ le linee assintotiche di S si cangino in un sistema coniugato. Se con

$$\overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D'}\,du\,dv + \overline{D''}\,dv^2$$

indichiamo la seconda forma quadratica fondamentale di $\overline{S}$, la condizione richiesta si traduce nell'annullarsi dell'invariante simultaneo delle due forme

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \quad \overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D'}\,du\,dv + \overline{D''}\,dv^2;$$

si deve avere cioè

$$(23)\qquad D\overline{D''} + D''\overline{D} - 2D'\overline{D'} = 0.$$

La simmetria di questa condizione dimostra che reciprocamente le assintotiche di $\overline{S}$ si distenderanno sopra S in un sistema coniugato. Di più si

osservi che se la coppia $(S, \overline{S})$ è di superficie reali, come supponiamo, esse avranno necessariamente reali le assintotiche, cioè negativa la curvatura (1).

Ora siccome $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$ soddisfanno le equazioni di Codazzi e la (23), se poniamo

$$\Gamma = \overline{D} \quad , \quad \Gamma' = \overline{D}' \quad , \quad \Gamma'' = \overline{D}''$$

ne risulta definita, per quanto precede, una deformazione infinitesima di S. E la superficie S_0 associata alla S in questa deformazione infinitesima avrà per la (22) la curvatura

$$K_0 = \frac{D D'' - D'^2}{\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2} = +1,$$

cioè la S_0 sarà applicabile sopra la sfera di raggio $= 1$. Così la superficie S supposta è necessariamente associata ad una superficie S_0 di curvatura costante positiva.

Inversamente se la S è associata in una deformazione infinitesima ad una superficie S_0 di curvatura $= +1$, per i corrispondenti valori di $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ avremo dalla (22)

$$\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 = DD'' - D'^2$$

e ponendo

$$\overline{D} = \Gamma \quad , \quad \overline{D}' = \Gamma' \quad , \quad \overline{D}'' = \Gamma''$$

verremo a soddisfare insieme le equazioni di Codazzi e quella di Gauss

$$\frac{\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2}{EG - F^2} = K,$$

onde esisterà una deformata (finita) S della $\overline{S}$ sulla quale, a causa della (23) che trovasi verificata, le assintotiche di S si convertiranno in un sistema coniugato.

Abbiamo così dimostrato nuovamente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S *ammetta una deformazione che converta le sue linee assintotiche in un sistema*

(1) E invero se $S, \overline{S}$ avessero curvatura positiva il loro sistema coniugato comune sarebbe certamente reale ed assumendolo a sistema coordinato (u, v) avremmo

$$D' = \overline{D}' = 0$$

e

$$D\overline{D}'' + D''\overline{D} = 0$$

mentre $DD'' > 0$, $\overline{D}\overline{D}'' > 0$, condizioni che si contraddiscono.

coniugato, è che la S *sia associata in una deformazione infinitesima ad una superficie* S_0 *di curvatura costante positiva.*

Si osservi in particolare che se la S_0 è una sfera, ogni sua associata S è una superficie d'area minima e la deformazione è quella ben nota (di Bonnet) che converte le assintotiche nelle linee di curvatura.

7. Le due superficie $S, \overline{S}$ trovandosi nelle medesime condizioni, come alla S corrisponde una superficie associata S_0 applicabile sulla sfera, così alla S corrisponderà un'altra tale superficie $\overline{S}_0$; e facilmente dimostriamo che $S_0, \overline{S}_0$ sono trasformate l'una dell'altra per trasformazione involutoria di Hazzidakis (1).

Per l'elemento lineare della S_0 abbiamo infatti dalle (21) la formola:

$$ds_0^2 = \frac{E D'^2 - 2F D' D + G D^2}{EG - F^2} du^2 + 2 \frac{E D' D'' - F(D D'' + D'^2) + G D D'}{EG - F^2} du\, dv + \\ + \frac{E D''^2 - 2F D' D'' + G D'^2}{EG - F^2} dv^2 .$$

D'altra parte dalle formole fondamentali della teoria delle superficie e precisamente dalle formole (1) pag. 149, vol. I delle *Lezioni* risulta che ds^2_0 è altresì il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo di $\overline{S}$, cioè di $\overline{S}_0$. Le due superficie a curvatura costante positiva $S_0, \overline{S}_0$ sono dunque in tale relazione che l'elemento lineare dell'una coincide coll'elemento lineare sferico dell'altra; esse sono perciò trasformate di Hazzidakis (*Lezioni*, l. c.).

Inversamente risulta di qui, e lo confermeremo con calcolo diretto al n.° seguente, che prese due superficie $S_0, \overline{S}_0$ di curvatura $K_0 = +1$, trasformate di Hazzidakis, ad ogni superficie S associata alla S_0 ne corrisponde una $\overline{S}$, perfettamente determinata, associata alla S_0 e tale che $S, \overline{S}$ sono applicabili, corrispondendo alle assintotiche dell'una un sistema coniugato sull'altra.

8. Ricerchiamo ora direttamente le formole che da una coppia nota $S_0, \overline{S}_0$ di deformate della sfera, nella relazione involutoria di Hazzidakis, fanno derivare le infinite coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili con corrispondenza delle assintotiche ad un sistema coniugato.

Se riferiamo $S_0, \overline{S}_0$ alle loro linee di curvatura (u, v) potremo porre

$$\begin{cases} ds^2_0 = \operatorname{senh}^2 \theta\, du^2 + \cosh^2 \theta\, dv^2 \\ \overline{ds}^2_0 = \cosh^2 \theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2 \theta\, dv^2 \end{cases}$$

essendo θ una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta \cosh \theta = 0 .$$

(1) *Lezioni*, vol. II, pag. 436.

Per i corrispondenti triedri principali collegati a S_0, $\overline{S}_0$ abbiamo allora le formole:

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \cosh\theta\, X_3\ ,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1\ ,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \cosh\theta\, X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2\ ,\ \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \operatorname{senh}\theta\, X_3\ ,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\, X_2 \end{cases}$$

$$(\bar{a})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_2 - \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_3\ ,\ \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_1\ ,\ \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_1 \\ \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} \overline{X}_2\ ,\ \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_1 - \cosh\theta\, \overline{X}_3\ ,\ \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = \cosh\theta\, \overline{X}_2\ . \end{cases}$$

Abbiasi ora una *qualunque* superficie S associata alla S_0 in una deformazione infinitesima. L'equazione di Weingarten per le deformazioni infinitesime della S_0 (o della S_0) è data da

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \cosh 2\theta\, .\, W = 0$$

e basterà prendere una soluzione W di questa per individuare in termini finiti una tale superficie associata S. D'altra parte avremo per la S formole del tipo:

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta\, X_1 + \mu \cosh\theta\, X_2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \mu \operatorname{senh}\theta\, X_1 - \lambda \cosh\theta\, X_2\ , \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, essendo λ, μ convenienti funzioni di u, v che si potrebbero subito esprimere per W e le derivate (cfr. n.° 3). Le condizioni d'integrabilità delle (c) si esprimono per le (a) colle due equazioni seguenti cui debbono soddisfare λ, μ:

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\lambda \cosh^2\theta) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\mu \cosh^2\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \operatorname{senh}^2\theta) - \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda \operatorname{senh}^2\theta) = 0\ . \end{cases}$$

Ma allora, in forma delle $(\bar{a})$, sono altresì differenziali esatti le espressioni:

$$(-\mu \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \lambda \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2)\, du \ +\ (\lambda \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \mu \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2)\, dv$$

colle analoghe e se indichiamo con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ i loro integrali, avremo le formole

$$(\bar{c}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\mu \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \lambda \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2 \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \lambda \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \mu \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2 . \end{cases}$$

Il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ descriverà una superficie $\overline{S}$ associata alla S_0 ed avente a comune con S l'elemento lineare:

$$ds = (\lambda^2 \operatorname{senh}^2\theta + \mu^2 \cosh^2\theta)\, du^2 - 2\lambda\mu\, du\, dv + (\lambda^2 \cosh^2\theta + \mu^2 \operatorname{senh}^2\theta)\, dv ;$$

dunque S, $\overline{S}$ sono applicabili. Di più troviamo

$$\begin{cases} D = -\lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\ ,\ D' = -\mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\ ,\ D'' = \lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \\ \overline{D} = \mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\ ,\ \overline{D}' = -\lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta\ ,\ \overline{D}'' = -\mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \end{cases}$$

e per ciò

$$D\overline{D}'' + D''\overline{D} - 2D'\overline{D}' = 0 .$$

Così adunque le assintotiche di S si distendono sopra $\overline{S}$ in un sistema coniugato e reciprocamente.

Si può ancora osservare che il sistema coniugato comune delle due superficie applicabili S, $\overline{S}$ è formato dalle linee (immaginarie)

$$u \pm iv = \text{cost}$$

corrispondente alle assintotiche di S_0, $\overline{S}_0$ e le (d), come facilmente si vede esprimono che questo sistema coniugato è formato da linee geodetiche. Le nostre superficie S, $\overline{S}$ stanno dunque colle superficie a curvatura costante positiva nella medesima relazione come le superficie di Voss, a sistema coniugato geodetico reale, colle superficie pseudosferiche, come del resto era analiticamente facile a prevedersi.

9. Dalle considerazioni del n.° 6 possiamo trarre un'altra interessante proprietà delle attuali superficie applicabili (S, $\overline{S}$). Se, indicando con σ un angolo costante, poniamo

$$D_\sigma = D\cos\sigma + \overline{D}\operatorname{sen}\sigma\ ,\ D'_\sigma = D'\cos\sigma + \overline{D}'\operatorname{sen}\sigma\ ,\ D''_\sigma = D''\cos\sigma + \overline{D}''\operatorname{sen}\sigma$$

è chiaro che $D_\sigma, D'_\sigma, D''_\sigma$ soddisferanno le equazioni di Codazzi come D, D', D''; $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$, ma inoltre anche quella di Gauss, poichè, sussistendo la (23), abbiamo

$$D_\sigma D''_\sigma - D'^2_\sigma = \cos^2\sigma\,(DD'' - D'^2) + \operatorname{sen}^2\sigma\,(\overline{D}\overline{D}'' - \overline{D}'^2) = DD'' - D'^2 .$$

Esiste dunque una deformata S_σ della S che ha per seconda forma fondamentale

$$D_\sigma\, du^2 + 2D'_\sigma\, du\, dv + D''_\sigma\, du^2$$

D'altronde se poniamo ancora:

$$\bar{D}_\sigma = D_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = -D \operatorname{sen}\sigma + \bar{D}\cos\sigma\ ,\quad \bar{D}'\sigma = D'_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = -D' \operatorname{sen}\sigma + \bar{D}'\cos\sigma,$$

$$\bar{D}''_\sigma = D''_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = -D'' \operatorname{sen}\sigma + \bar{D}''\cos\sigma\ ,$$

vediamo che $\bar{D}_\sigma$, $\bar{D}'_\sigma$, $\bar{D}''_\sigma$ soddisfanno nuovamente le equazioni di Codazzi e Gauss e di più l'analoga alla (23)

$$D_\sigma \bar{D}''_\sigma + D''_\sigma \bar{D}_\sigma - 2D'_\sigma \bar{D}'_\sigma = 0\ .$$

La coppia di superficie applicabili

$$S_\sigma\ ,\ \bar{S}_\sigma = S_{\frac{\pi}{2}+\sigma}$$

gode dunque ancora della proprietà che le assintotiche dell'una si convertono sull'altra in un sistema coniugato, precisamente come la coppia iniziale S, $\bar{S}$, corrisponde a $\sigma = 0$.

Una superficie S della nostra classe (associata di una superficie applicabile sulla sfera) ammette adunque una deformazione continua, dipendente da un parametro σ, durante la quale essa conserva sempre lo stesso carattere, cioè ha sempre un'associata S_0 di curvatura $K_0 = +1$. E se si calcola l'elemento lineare sferico rappresentativo di S_σ facilmente si vede che durante la detta deformazione continua di S_σ l'associata S_0 applicabile sulla sfera subisce una trasformazione continua di Lie-Bonnet. Osserveremo ancora che il sistema (immaginario) di linee geodetiche $u \pm iv = \text{cost}$ si mantiene sempre coniugato in questa deformazione. Nel caso particolare della deformazione continua di una superficie d'area minima il sistema geodetico coniugato che si conserva è formato dalle linee di lunghezza nulla.

Astronomia. — *Sulla precisione delle posizioni stellari.* Nota del Corrispondente A. Abetti.

La Nota, *Fotografia del cielo. Sulla precisione delle posizioni delle stelle ottenute mediante la fotografia*, del prof. G. Boccardi, inserita nel precedente volume XII, a pag. 601, si propone di dimostrare che il grado di esattezza delle posizioni fotografiche delle stelle « è di gran lunga superiore a quello delle posizioni date dai migliori cataloghi e poggiate sopra molte osservazioni meridiane ».

Da quella Nota i lettori non astronomi possono essere indotti a fare degli apprezzamenti non del tutto conformi al vero rispetto all'esattezza, o precisione, delle posizioni stellari ottenute per due vie diverse, l'osservazione diretta visuale meridiana, e l'indiretta fotografica agli equatoriali, perciò nell'interesse della verità mi è venuto il desiderio di mettere in chiaro la cosa.

Nello stato attuale dell'astronomia pratica, dedita alle posizioni delle stelle, il materiale raccolto in un secolo e mezzo (da Bradley a noi) colle osservazioni meridiane, costituisce, in fatto di esattezza, due sistemi di triangolazione celeste, uno di primo, l'altro di secondo ordine. Al sistema di primo ordine appartengono le stelle *fondamentali* (i capisaldi, un migliaio circa), ossia tutte quelle stelle, dalla 1ª alla 7ª grandezza, le cui osservazioni meridiane *assolute* ed *incessanti* hanno dato tutti gli elementi per poter fissare ad ogni momento la loro posizione celeste con una precisione di $0.^s01$ in ascensione retta e di $0.''1$ in declinazione come si ha dalle effemeridi annue basate sui cataloghi fondamentali di Auwers o di Newcomb. Al sistema di secondo ordine appartengono tutte le altre stelle fino alla 9ª grandezza (qualche centinaio di migliaia) le cui posizioni stabilite con *poche osservazioni differenziali* meridiane sono state registrate nei ben noti cataloghi stellari con una precisione che si può reputare, in generale e fatta astrazione dai casi singolari, di $0.^s1$ in ascensione retta e di $1.''0$ in declinazione.

Ora volendo infittire vieppiù la rete inserendovi le piccole stelle, il cui numero cresce smisuratamente col diminuire della grandezza tanto che fino alla 11ª se ne contano due milioni, non sarebbero bastati i cerchi meridiani; ma alle osservazioni meridiane bisognava associarvi quelle extrameridiane che si sarebbero fatte agli equatoriali [1]; tuttavia la completa raccolta visuale

[1] I saggi di questo genere non mancarono e si possono vedere nelle pubblicazioni seguenti: Annali dell'Harvard College di Cambridge americana, vol. I e II: *Zone osservate all'equatoriale di Merz di 15 pollici nel 1852-53*; Annali di Vienna del Weiss, vol. IX e segg.: *Zone di Palisa all'equatoriale di Clark di 12 pollici nel 1884 e segg.*; Beobachtungs-Ergebnisse di Berlino, fasc. 9: *Zone di Knorre all'equatoriale di Merz di 9 pollici nel 1886 e segg.*

delle une e delle altre con buon grado di esattezza, sarebbe stata interminabile, se non che ad abbreviare il lavoro con precisione insperata venne in soccorso la fotografia, applicata per l'appunto all'equatoriale.

Le misure micrometriche differenziali, eseguite sulle lastre fotografiche in gabinetto, danno gli elementi per riferire la posizione delle piccole stelle (1) alle posizioni delle stelle osservate al meridiano. Ora poichè queste misure raggiungono una precisione perfetta, come ha posto in evidenza fra gli altri l'illustre direttore attuale dell'osservatorio di Parigi, il Loewy nelle sue classiche circolari a proposito dell'asteroide *Eros*, è evidente che le posizioni delle piccole stelle resteranno determinate con una precisione subordinata a quella delle posizioni meridiane delle stelle di riferimento che, in generale, sono quelle di secondo ordine. Questo concetto fu già espresso dal predecessore del Loewy, il Tisserand, in una sua notizia sulla conferenza astrofotografica del 1896 da lui presieduta (2). Inoltre siccome la precisione delle posizioni delle stelle di secondo ordine va senza posa aumentando con nuove e ripetute revisioni meridiane appoggiate alle fondamentali, è pure evidente che nel progresso del tempo, ed anche a non lungo andare, arriveremo ad avere un unico catalogo in cui saranno registrate le posizioni di tutte le stelle con un'unica precisione.

Frattanto la conferenza astrofotografica del 1896 ammise la *necessità* della pronta pubblicazione delle coordinate rettilinee, ma poi, per il resto espresse soltanto dei desiderî così che, Potsdam pubblicò le sole coordinate rettilinee, Parigi vi aggiunse le costanti *provvisorie* della lastra (3), ed Helsingfors anche le ascensioni rette e le declinazioni pel 1900 appoggiate unicamente al sistema della Astronomische Gesellschaft. Nella pubblicazione di Helsingfors (4), appena apparsa, si possono paragonare le posizioni fotografiche delle stelle di riferimento colle posizioni meridiane della AG ripor-

(1) Cioè fino alla 11ª gr. o poco più per la composizione dei cataloghi fotografici; ma oltre di questi avremo le carte fotografiche celesti le quali conteranno anche le stelle di 13ª e 14ª grandezza le cui posizioni non saranno sistematicamente rilevate, almeno per ora, trattandosi di un complesso di trenta milioni di punti; però potranno essere rilevate parzialmente *ad libitum* quando occorre.

(2) Annuaire 1897 publié par le Bureau des longitudes, pag. B 15: « Il est important « d'examiner la précision avec laquelle on détermine ainsi (*cioè colla fotografia*) les coor- « données de toutes les étoiles. Cette précision ne saurait évidemment dépasser celle des « mesures méridiennes auxquelles on s'adresse pour avoir les positions des étoiles de re- « père. Il arrive qu'elle est à fort peu près la même ».

(3) Tanto Potsdam, quanto Parigi inserirono nelle loro pubblicazioni, formole, tavole, ed esempî per il passaggio dalle coordinate rettilinee alle coordinate celesti equatoriali *provvisorie*, ma tuttavia esatte quanto quelle dei cataloghi meridiani.

(4) *Catalogue photographique du ciel. Zone de Helsingfors entre* $+39°$ *et* $+47°$. Publiée par Anders Donner, directeur de l'observatoire de Helsingfors. Première série: Coordonnées rectilignes et équatoriales. Tome IV, clichés de 9^h à 12^h, Helsingfors 1093.

tate nell'ultima colonna intitolata: *Remarques et Bonn et Lund Zones.* Limitando il paragone alle prime quattro pagine (cliché 379) abbiamo per le 34 stelle che sono indicate col numero trascritto nella prima colonna della tabellina qui sotto, le differenze $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ nel senso AG *meno Helsingfors.*

AG — *Hels. Ph.*

*	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	*	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	"		s	"
13	+ 0.07	0.0	66.67	0.00	— 1.4
14	0.00	+ 0.4	73	+ 0.07	— 1.5
16	— 0.09	— 1.0	77	0.00	— 0.2
18	— 0.02	— 1.8	87	— 0.19	+ 0.1
19	+ 0.06	— 1.1	90	+ 0.08	— 0.9
20	— 0.15	0.0	91	+ 0.01	— 0.4
38	— 0.05	— 2.0	107	— 0.02	+ 1.5
39	+ 0.02	— 0.9	110	— 0.01	+ 0.5
40	— 0.22	+ 1.5	119	— 0.15	— 0.1
48	+ 0.02	— 0.9	122	+ 0.11	— 1.0
49	+ 0.15	+ 3 5	129	— 0.08	+ 0.6
50	+ 0.01	— 0.4	140	+ 0.06	— 0.1
54	+ 0.07	+ 1.4	141	+ 0.12	+ 0.7
56	— 0.08	— 0.2	143	+ 0.06	— 0.2
60	+ 0.09	— 1.5	144	+ 0.01	— 0.3
61	— 0.06	+ 0 8	145	— 0.17	+ 0.2
63	+ 0.08	— 0.5	149	+ 0.05	+ 0.5

I confronti di questo genere, che naturalmente saranno fatti nella preparazione dei cataloghi fotografici per i controlli e le rettifiche di calcolo, metteranno anche in evidenza le stelle che, o per moto proprio, o per altre ragioni hanno principalmente bisogno di essere riosservate ai cerchi meridiani (1).

(1) In corso di stampa mi è stato gentilmente spedito, per la biblioteca dell'Osservatorio di Arcetri, il primo volume del Catalogo Fotografico della Specola Vaticana nel quale veggo date le sole coordinate rettilinee e le costanti delle lastre dedotte da dodici stelle della Astr. Gesell. Il confronto AG—Cat. Fot. per le dodici stelle si trova premesso ai quadri delle coordinate di ogni lastra.

Geologia. — *Sulla presenza dei calcari a Toucasia carinata nell' isola di Capri.* Nota del Corrispondente C. F. Parona (1).

Da tempo si discute sull'età dei calcari ad *Ellipsactinia* di Capri ed è noto, che recentemente il dott. Oppenheim (2), autore di parecchie Memorie e Note sulla geologia di quest'isola, espresse l'opinione che detti calcari, nei quali egli riconobbe parecchie forme fossili degli strati titonici di Stramberg e del M. Pellegrino in Sicilia, rappresentino la parte più antica del Cretaceo. D'altra parte il prof. Di Stefano (3), che è d'accordo coi professori Bassani e De Lorenzo nell'ammettere la presenza di ellipsactinidi nel Titonico e nel Cretaceo dell'Italia meridionale, crede innegabile l'appartenenza al Cretaceo dei calcari di Capri, che contengono ellipsactinidi non logorate e che fanno corpo colla roccia, associate a forme di nerinee che si trovano anche nei calcari con *Toucasia* di Sicilia. Egli ritiene inoltre che la presenza di qualche rara specie di origine titonica nei calcari di Capri sia dovuta verisimilmente al fatto, ch'essi si sono formati a spese di altri calcari titonici, e non ammette l'estensione e l'età attribuita da Oppenheim al Titonico, cui egli a ragione conserva il significato attribuitogli da Oppel, Zittel e Gemmellaro.

La scoperta di nuovi fossili recentemente fatta dal dott. Ignazio Cerio di Capri, appassionato e benemerito studioso di quanto risguarda la sua Isola, può giovare a risolvere la questione discussa, dell'età dei calcari con ellipsactinidi, in senso favorevole all'opinione del prof. Di Stefano. Questi fossili mi furono comunicati in questi giorni dal prof. R. Bellini, che pure da parecchi anni si occupa della geologia di Capri: sono esemplari di *Toucasia carinata*, ben conservati nel guscio, ma in frammenti, perchè non fu possibile estrarli completi dalla roccia assai tenace. Per lo stesso motivo non fu possibile a me di preparare la cerniera in nessuna valva: tuttavia, giovandomi del confronto con esemplari della stessa specie, che si conservano nel museo geologico di Torino, e colle figure degli autori, ho potuto convincermi della esattezza della determinazione. Ricordando che il dott. Oppenheim già aveva riconosciuto in questi calcari un *Diceras* sp. cfr. *carinatum* Gemm., non trascurai di fare il confronto della chamacea ora scoperta con questa specie di Gemmellaro e posso escludere la corrispondenza della chamacea di Capri con quella siciliana.

Dalla *Toucasia carinata* si distinguono altri frammenti ed un esemplare di grandi dimensioni, raccolti nello stesso calcare, i quali sono rife-

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

(2) P. Oppenheim, *Neue Fossilfunde auf Capri*, Zeitschr. d. Deutsch. geol. Gesellschaft, 1897.

(3) G. Di Stefano, *Il Malm in Calabria*, Riv. It. di Paleont., 1900.

ribili, giudicando dai caratteri esterni, alla *Toucasia transversa* Paquier. Il dott. Cerio mi comunicò inoltre una valva, che probabilmente appartiene al genere *Fimbria*, numerosi esemplari di una piccola nerinea finora indeterminata ed una grande nerinea, che nei caratteri esterni ed interni ben corrisponde alla *Nerinea gigantea* d' Hombre Firmas. Questa nerinea si trova nei calcari di Orgon e di Vaucluse a *Requenia ammonia* (Goldf.), la quale requenia, come informa Paquier, si accompagna pure colla *Toucasia carinata*; ne è improbabile ch'essa si trovi anche nel calcare di Capri, poichè il dott. Cerio avvertì insieme alle chamacee carinate un'altra forma arrotondata, che potrebbe essere la requenia suddetta.

Il calcare compatto, che contiene la *Toucasia carinata* è di color grigio-cereo e ingloba delle ellipsactinidi, che spiccano come macchie più scure sul fondo della roccia, la quale ha qua e là struttura oolitica. L'esame al microscopio svela però che non si tratta sempre di vere pisoliti od ooliti; spesso sono minuti ciottolini calcari a struttura organica e per le più piccoli frammenti arrotondati di gasteropodi. Così verificai la struttura delle *Ellipsactiniae* (*E. ramosa* Can.?) e riconobbi quella delle *Spheractiniae* (*Sph. dicotoma* Can.?) e riscontrai sezioni di corallarî, spongiarî ecc. e, in maggior copia, di piccoli foraminiferi, segnatamente miliolidi (1).

Il dott. Cerio mi riferì, a mezzo del prof. Bellini, che il banco calcare, dal quale egli estrasse gli esemplari di *Toucasia* e gli altri fossili suaccennati, attraversa la Punta del Capo diretto dalle rovine del Palazzo di Tiberio alla spiaggetta di Caterola: ad esso seguono superiormente e regolarmente altri calcari, nei quali presso l'abitato di Capri sono abbastanza comuni più grandi esemplari di ellipsactinidi. Parecchi campioni erano già stati donati dal prof. Bellini al Museo Geologico di Torino e, dall'esame fattone, questi calcari mi risultano affatto simili a quello che contiene le *Toucasiae*. In quanto agli idrozoi inclusivi, il dott. G. Capeder, che ne fece studio, mi informa d'aver riconosciuto con sicurezza la *Ellipsactinia ramosa* Can. e la *Spheractinia dicotoma* Can. e con dubbio, essendogli mancato il tempo per completarne l'esame, la *Ellipsactinia polipora* Can., *Ell. micropora* Can. e *Ell. caprensis* Can.

La presenza della *Toucasia carinata* permette dunque di ritenere corrispondente il calcare di Capri, che la contiene, ai calcari a *facies urgoniana*, caratterizzati dallo stesso fossile, riconosciuti in numerosi punti dell'Italia meridionale. Riguardo all'età ho già altrove (*Tratt. di Geol.*, pag. 518) accet-

(1) Nella sua struttura questo calcare è molto simile ai calcari urgoniani del Giura meridionale e delle Catene subalpine illustrati dalle belle microfotografie di M. Hovelacque (*Album* Kilian, Paris, 1900, tav. XLI e seg.). Ma in queste microfotografie non si riscontrano ellipsactinidi, mentre non sono rare le orbitoline, delle quali non riscontrai traccia nei campioni del calcare di Capri esaminati finora.

tata l'idea, che *l'urgoniano* sia un equivalente del *barremiano* superiore e dall'*aptiano* inferiore; opinione questa che trovo espressa anche nella recentissima monografia di V. Paquier sulle rudiste urgoniane (1). Da questo lavoro risulta inoltre, che la *Toucasia carinata* nel Delfinato e in Savoia abbonda nella massa superiore dei calcari urgoniani, la quale presumibilmente è d'età aptiana piuttosto che barremiana.

Fisiologia. — *La ventilazione rapida dei polmoni per mezzo di un apparecchio che funziona con aria compressa e rarefatta.* Nota del Socio A. Mosso (2).

Per approfondire lo studio dell'acapnia avevo bisogno di una ventilazione intensa dei polmoni la quale producesse una lunga apnea. Mi proposi a tale scopo di imitare il ritmo del respiro che hanno i cani per l'azione del caldo, quando mantengono il sangue in stato apnoico. Volendo dare al respiro una frequenza che superi le cento respirazioni al minuto, i soffietti ordinarî non servono bene, perchè nella espirazione non esce abbastanza presto dai polmoni l'aria iniettata nella cassa toracica per distenderli. Pensai che servendomi dell'aria rarefatta potevo ottenere un'espirazione non solo più rapida, ma anche più completa.

Parecchi fisiologi avevano già costrutto delle pompe per far la respirazione artificiale, le quali insieme alla pressione dell'aria per distendere i polmoni, davano anche una pressione negativa per aspirare l'aria dai polmoni. Ricordo l'apparecchio fatto dal prof. Hering fino dal 1870, che venne adoperato dal Head (3) per produrre la ventilazione del polmone che egli chiamò *negativa*. La « Cambridge Scientific Instrument Company » provvide molti laboratorî di un apparecchio per la respirazione artificiale che serve a comprimere e ad aspirare l'aria dai polmoni. Recentemente il prof. F. Tangl (4) descrisse pure un apparecchio fatto da due pompe accoppiate, l'una aspirante, l'altra premente, che funzionano messe in moto da uno stesso asse, il quale asse chiude alternativamente il passaggio dell'aria nei polmoni.

Nessuno di questi apparecchi serviva al mio scopo, che era di produrre la respirazione con un ritmo rapidissimo in modo da ottenere una ventilazione molto attiva, senza mettere ostacolo alla circolazione del sangue colla

(1) V. Paquier, *Les rudistes urgoniens*, 1er part., Mém. Soc. Géol. d. France, Paléont., XI, 1903.

(2) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

(3) H. Head, *On the regulation of Respiration*. Journal of Physiology, vol. 10, pag. 28.

(4) F. Tangl, *Beschreibung eines Apparates zu quantitativen Respirationsversuchen mit künstlicher Athmung*. Arch. f. ges. Physiologie, vol. 98, pag. 588.

pressione interna sugli alveoli polmonari. L'apparecchio, che ora descrivo, consta di due grandi recipienti, dei quali uno è pieno di aria compressa a mezza atmosfera in più dell'ordinaria, e l'altro di aria rarefatta a mezza atmosfera. Adoperavo a tale scopo le due camere in ferro che mi servono per studiare l'azione dell'aria compressa e la depressione barometrica sull'uomo, le quali si trovano vicine nella stessa stanza del laboratorio. Un motore

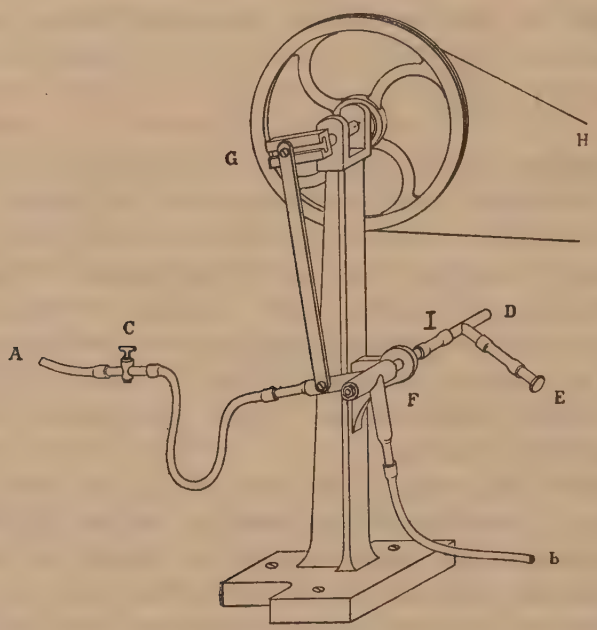


Fig. 1.

elettrico mette in azione le pompe che producono la rarefazione dell'aria e quelle che la comprimono. Durante l'esperienza, quando gli animali essendo grossi si consumava molt'aria, lasciavo che le pompe funzionassero di continuo, regolando per mezzo di robinetti l'eccesso della pressione negativa, o positiva, in modo che la pressione nelle due camere rimanesse presso a poco costante.

Questa prima parte dell'apparecchio non l'ho rappresentata con un disegno, perchè ognuno può facilmente immaginare due serbatoi pieni l'uno di aria compressa e l'altro di aria rarefatta.

La fig. 1 mostra come è fatta la parte dell'apparecchio che serve ad alternare la pressione positiva o negativa nei polmoni, che si trovano in comunicazione col tubo D per mezzo di una cannula tracheale. La camera ad aria compressa comunica coll'apparecchio per mezzo di un tubo di gomma A

del diametro esterno di 12 mm. e quello del lume interno di 6 mm. Una chiavetta C di metallo bene lavorata, serve a graduare l'accesso dell'aria compressa. L'aspirazione si fa per mezzo del tubo B. Il pezzo F è un robinetto a tre vie nel quale la parte disegnata in nero nella fig. 2 rappresenta la parte fissa e centrale che si continua colla cannula della trachea: la parte disegnata a tratti invece è mobile. Questa parte è costituita da due tubi ad angolo retto come si vede nelle figg. 1 e 3, e viene messa in moto da una biella. Un motore elettrico per mezzo della cordicella H, G fa girare

Fig. 2.

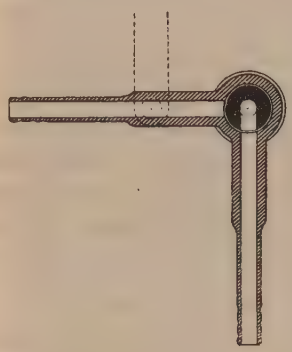


Fig. 3.

la ruota della biella, e questa spinge ora il tubo dell'aria compressa e ora quello dell'aria rarefatta in comunicazione coll'apertura centrale che sta in rapporto colla trachea. Il ritmo della respirazione artificiale si può modificare facilmente per mezzo di una serie di carrucole a diversi diametri che formano un cono presso il motore elettrico. La quantità d'aria che penetra nei polmoni si regola per mezzo del robinetto C, oppure collo spostamento dell'eccentrico della biella. Essendo grande la provvista dell'aria compressa, generalmente non chiudevo il tubo D colla cannula della trachea, ma introducevo semplicemente il tubo D nell'interno della cannula tracheale che essendo più grossa lasciava sfuggire l'aria eccedente. Pei grossi cani che mi servono generalmente per queste esperienze, il diametro interno della cannula tracheale è di 14 mm. Il diametro esterno del tubo D essendo solo di 10 mm., vi restano 2 mm. intorno liberi, che servono come valvola di sicurezza, perchè la pressione tanto positiva quanto negativa non agiscano troppo intensamente sui polmoni. Per gli animali più piccoli adoperavo corrispondentemente dei tubi di un diametro minore.

La cosa più importante di questo apparecchio, è che la respirazione artificiale si può ottenere, come vedremo nei seguenti tracciati, molto più intensa che coi soffietti ordinarî, pur essendo piccola la dilatazione del torace.

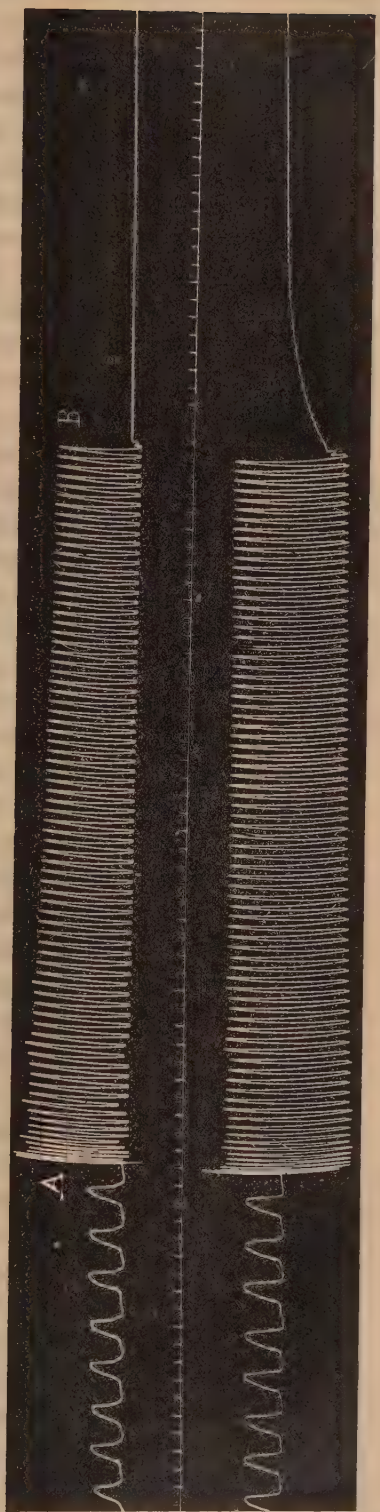
Per fare economia di aria, qualche volta mettevo la cannula tracheale direttamente in comunicazione col tubo D. In questo caso si lascia aperto il tubo E che funziona come valvola di sicurezza, e lo si chiude, col tappo di vetro che vedesi nel disegno, quando si è provato che la chiavetta C lascia passare solo la quantità necessaria, perchè non si dilati troppo il polmone. Per essere più sicuri che la pressione negativa non sia troppo forte e possa danneggiare la circolazione del sangue nei polmoni, tanto il tubo I quanto quello che fa comunicare il tubo D colla cannula tracheale, sono fatti con un tubo di gomma a pareti sottili, cosichè se l'aspirazione è troppo forte funzionano da valvola di sicurezza chiudendo il passaggio, perchè le pareti del tubo combaciano.

Qualche volta prima dell'esperienza mettevo una vescica di vitello bagnata e molle in comunicazione col tubo D invece del polmone dell'animale, e provavo regolando l'accesso dell'aria per mezzo della chiavetta C fino a che si avesse per ogni apertura della chiavetta F un accesso dell'aria corrispondente al bisogno. Quando era così rettificato l'apparecchio, mettevo il tubo D in comunicazione colla cannula tracheale. Al più piccolo accidente che succedesse aprivo il tappo E.

Per assicurarmi se l'aspirazione produceva un effetto utile, feci delle esperienze di raffronto che riferisco. Le seguenti figure furono ridotte di un terzo. Un cane del peso di 18 chilogrammi viene addormentato profondamente coll'iniezione di 4 grammi di cloralio nella cavità addominale: fatta la tracheotomia ed essendo messa una grossa cannula di vetro nella trachea avviciniamo l'animale all'apparecchio. Il tubo della cannula come fu detto ha un diametro tale che il tubo D (fig. 1) penetrandovi dentro lascia intorno uno spazio libero di 4 mm. Nella fig. 4 la linea superiore A rappresenta il tracciato della respirazione toracica quando l'apparecchio funziona con aspirazione. La seconda linea B il tracciato del respiro quando non vi è l'aspirazione espiratoria. La terza linea segna il tempo in secondi. Per fare questa esperienza dopo scritto un pezzo di tracciato normale, in A mettiamo in moto l'apparecchio, e guardando i secondi, lasciamo che funzioni l'afflusso dell'aria compressa e l'aspirazione dell'aria rarefatta per 10 secondi; si ottiene un arresto del respiro il quale dura 27″. Chiudiamo il tubo dell'aspirazione e dopo tre minuti facciamo un'altra esperienza eguale in B, succedono 20 respirazioni nello stesso tempo di 10″, ma la durata dell'apnea è solo di 19″. Ripetiamo parecchie volte questo raffronto e otteniamo sempre il medesimo risultato. Per mostrare con quale regolarità funzioni l'apparecchio, riproduco nella fig. 5 uno dei tracciati scritti dopo i precedenti. Nella prima linea B′ vi è la respirazione artificiale fatta senza aspirazione, e nella linea sottostante A′ la respirazione artificiale con aspirazione fatta entrambe le volte per 10 secondi, e vediamo che i risultati sono perfettamente identici a quelli del tracciato 4, onde posso conchiudere che servendosi di questo appa-

Fig. 4.

Fig. 5.



Tor. *Ad.*

Fig. 6.

recchio con l'aspirazione si ottiene una ventilazione più completa, cosichè dura più a lungo l'apnea.

Che la ventilazione sia migliore quando si adopera l'aspirazione non lo si vede solo dall'effetto dell'apnea, ma paragonando i tracciati troviamo che le dilatazioni del torace sono più piccole in B e B′, quando non facciamo l'aspirazione, sebbene sia identica la pressione positiva che agisce nelle curve A A′ e B B′. Il torace non torna alla posizione di riposo espiratorio quando si adopera solo la pressione positiva e tutte le basi delle espirazioni rimangono più sollevate nelle curve B B′; mentre che nei tracciati A A′ l'aspirazione dell'aria rarefatta rende più completa l'espirazione e questa scende in tutte sotto la linea normale del riposo espiratorio. Questa è la causa per cui divengono più ampie le respirazioni e la ventilazione dei polmoni è più attiva.

L'utilità di questo apparecchio nel produrre l'apnea apparisce evidente nei cani che hanno subìto il taglio dei vaghi e nei quali coi soffietti ordinari si stabilisce meno facilmente l'apnea.

Riferisco uno di questi esempi colla fig. 6. È un cane del peso di 9 chilogrammi avvelenato col cloralio. La linea superiore rappresenta il tracciato della respirazione toracica scritta per mezzo di un pneumografo e la linea sottostante quella del respiro addominale presa con un pneumografo eguale messo intorno al torace. Nel mezzo fra le due curve fu scritto il tempo ogni secondo, i tracciati furono ridotti di un terzo. In questa esperienza si mise il tubo elastico a parete sottili come valvola di sicurezza, e non sfuggiva l'aria eccedente dalla cannula tracheale. Il respiro è lento perchè avevamo tagliato poco prima i due nervi vaghi al collo. Dopo scritto il primo pezzo fermiamo il cilindro in A e facciamo funzionare l'apparecchio per la ventilazione dei polmoni con aspirazione. Dopo 15 secondi di respirazione artificiale mettiamo in moto il cilindro registratore: esso impiega un po' di tempo a prendere la velocità regolare, guardando la parte inferiore dei moti del torace vediamo che il cane fa ancora quattro inspirazioni. Nella parte superiore delle respirazioni dell'addome le ondulazioni sono visibili per un tempo alquanto più lungo, poi malgrado il taglio dei vaghi l'apnea è completa nell'ultima parte del tracciato. In B si ferma e l'apnea è completa. La curva dell'addome sale oltre il livello del riposo primitivo, come se la tonicità del diaframma fosse cresciuta: nella curva addominale si vedono le pulsazioni del cuore. L'apnea durò oltre un minuto e quando ricominciò il respiro esso presentava dei periodi di attività maggiore o minore, tanto nella frequenza quanto nella forza e profondità dei moti respiratori.

Alcuni fisiologi come Sigmund Mayer [1] hanno creduto che la pressione sanguigna diminuisca nell'apnea, solo perchè la distensione polmonare pro-

[1] Sig. Mayer, *Studien zur Physiologie des Herzens und der Blutgefässe. Sitzungsberichte der Ak d. Wissenschaften Wien B.* LXXIV. 1876, pag. 281.

Fig. 7.

dotta dalla respirazione artificiale disturba la circolazione del sangue. In queste esperienze colla ventilazione rapida del polmone e l'aspirazione espiratoria per mezzo dell'aria rarefatta, può considerarsi come nullo il disturbo che recasi alla circolazione polmonare. Il modo graduato col quale discende nella fig. 7 la pressione del sangue e torna a crescere in ω durante l'apnea, dimostrano che si tratta realmente di un'azione deprimente che l'apnea esercita sul centro vasomotorio e sul cuore.

Mi assicurai per mezzo di esperienze di raffronto che l'apparecchio con aspirazione disturba meno la piccola circolazione che non quella fatta col soffietto, o colla semplice pressione positiva senza aspirazione. Per brevità non riproduco i tracciati di raffronto e mi limito a riferire colla fig. 7 un tracciato della pressione scritta col manometro a mercurio messo in comunicazione coll'arteria carotide. Basta la semplice ispezione di questo tracciato per convincersi che la pressione e l'aspirazione nei polmoni fatta con un ritmo di 120 movimenti al minuto non mettono alcun ostacolo alla circolazione del sangue e la diminuzione della pressione sanguigna è prodotta da altre ragioni che non siano le meccaniche della respirazione.

Il tracciato 7 fu preso sopra un cane del peso di 8 chilogrammi al quale eransi iniettati gr. 2,5 di cloralio nella cavità addominale. La pressione sanguigna in α era 150 mm. di mercurio. Il tempo è scritto ogni 2 secondi. In α comincia la respirazione artificiale e cessa in ω. Vediamo comparire 5 ondulazioni successivamente più lunghe. La forza del polso diviene alquanto più piccola, mentre che diminuisce la pressione da 150 a 100 mm.

Il ritmo della frequenza si accelera alquanto, ma non cambia durante ogni ondulazione. In ω cessa la respirazione

artificiale e la pressione cresce lentamente e supera il valore primitivo: ma alla fine del tracciato non è ancora comparsa la respirazione. Il primo movimento inspiratorio succede venti minuti più tardi.

In una prossima Nota studierò queste oscillazioni della pressione sanguigna, mostrando come esse dipendano dalle interferenze dei moti respiratori con quelli del cuore.

Fisiologia. — *Teoria della tonicità muscolare fondata sulla doppia innervazione dei muscoli striati.* Nota del Socio A. Mosso.

Grützner (1) per spiegare le differenze che si osservano nella contrazione dei muscoli secondo la natura e l'intensità degli eccitamenti, ammise che entrassero in azione due parti diverse del medesimo muscolo. Fino da quando studiai la contrattura nei muscoli dell'uomo per mezzo dell'ergografo (2) avevo sperato che colla teoria del Grützner si potesse spiegare la tonicità dei muscoli e la contrattura, ed ebbi uno scambio di lettere con lui e feci delle esperienze in proposito.

È noto come Grützner abbia ammesso che i muscoli rossi adempiano l'ufficio di un supporto interno (*innere Unterstützung*).

« Questi mantengono il muscolo fermo in una determinata lunghezza media, che naturalmente sarà tanto più piccola quanto più sono abbondanti le fibre rosse. Quando si eccita questo muscolo così raccorciato con un eccitamento non troppo forte, si contraggono le sue parti più eccitabili che sono quelle bianche e questa contrazione succede più rapida. Quanto più forte sarà l'eccitamento, tanto maggiore sarà l'attività che prendono al processo di contrazione le parti più lente, ed a questo modo sollevasi la curva del tetano ». Così Grützner spiegava perchè sulla contrazione delle parti rosse di un muscolo potessero sovrapporsi le contrazioni più rapide delle parti bianche.

Dopo che Grützner aveva dimostrato che un muscolo non può considerarsi come una unità fisiologica, si cercò quale funzione avessero le varie sostanze che formano il muscolo. Biedermann (3) accettando l'idea emessa dal Retzius nel 1881 nel suo lavoro fondamentale intorno al sarcoplasma (4) che questa sostanza serva solo alla nutrizione, ammise che i muscoli ricchi di sarcoplasma resistessero di più alla fatica che non i muscoli chiari i quali contengono meno sarcoplasma. È probabile come ammise Grützner che nella

(1) P. Grützner, Arch. f. d. g. Physiologie, Band. 41, 1887, pag. 280.
(2) A. Mosso, Archives ital. de Biologie, tome XIII, pag. 165.
(3) W. Biedermann, Elettrophysiologie I Abth., pag. 109, 1895.
(4) Retzius, *Muskelfibrille und Sarkoplasma.* Biol. Untersuch. 1881.

produzione del tetano vi prendano una parte diversa le due qualità di fibre che costituiscono il muscolo: ma finora l'analisi fisiologica non è ancora giunta a qualche conclusione sicura.

Quando Fano (1) scoprì le oscillazioni del tono nel cuore dell'*Emys europaea*, ammise che il doppio ritmo funzionale delle orecchiette avesse luogo in due parti differenti del muscolo auricolare: ma non andò oltre in tale affermazione e non ha specificato quali fossero queste parti. La teoria di Fano ha una certa affinità con quella del Grützner, solo che invece di attribuire a fibre di differente natura la contrazione lenta del tono e quella più rapida delle contrazioni ordinarie, suppone che le medesime fibre constino di due elementi dei quali uno produce il cambiamento di tono e l'altro le contrazioni ritmiche.

Fano affermando la natura *miogenetica* delle oscillazioni del tono, attribuì l'assenza di questo fenomeno nei ventricoli alla differenza essenziale nella natura della fibra muscolare di queste due regioni cardiache (2).

A queste due teorie del Grützner e del Fano, se ne può aggiungere una terza; ed è quella della doppia innervazione che io propongo, secondo la quale le medesime fibre possono alternativamente e secondo la natura delle eccitazioni che provengono dalle fibre midollate, o da quelle del simpatico, produrre ora una contrazione lenta ed ora una contrazione rapida in modo indipendente l'una dall'altra.

La presente Nota desidero sia accolta come una semplice comunicazione preliminare. Devo interrompere le ricerche sul tono dei muscoli respiratori per ultimare un volume intorno alla depressione barometrica: ma spero di poter riprendere presto questo studio e nello scrivere quest'appendice alle ricerche precedenti (3), intendo solo mostrare con una discussione teorica quanto sia ragionevole, e non infruttuosa la speranza di spiegare le scosse muscolari, la tonicità, ed il tetano per mezzo della struttura anatomica dei muscoli.

La teoria del sarcoplasma.

Come ulteriore sviluppo della teoria del Fano, il Bottazzi ne propose un'altra (4).

(1) G. Fano, *Ueber die Tonusschwankungen der Atrien des Herzens von Emys europaea*. Beiträge zur Physiologie. Carl Ludwig, 1887, pag. 297.

(2) *Dictionnaire de Physiologie*, par Charles Richet. Tome IV, pag. 98.

(3) A. Mosso, *Azione dei centri spinali sulla tonicità dei muscoli respiratori*. Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino, 13 novembre 1903.

(4) Ph. Bottazzi, *The oscillation of the auricular Tonus in the Batrachian Heart*. The Journal of Physiology, vol. XXI, pag. 1, 1897; Archives italiennes de Biologie, Tome 26, pag. 380.

Cito le sue parole (1):

« Alle due materie che costituiscono la fibra muscolare attribuisco le proprietà generali della eccitabilità e della contrattilità, ed ammetto, che la sostanza anisotropa eseguisca i movimenti rapidi e sia eccitabile, e che il sarcoplasma eseguisca i moti più lenti, che esso abbia la funzione semplice ed oscura del tono, e sia meno eccitabile ».

Questa ipotesi del Bottazzi mi parve soddisfacente fino a quando ho creduto con lui che quanto maggiore è la quantità di sarcoplasma nelle fibre muscolari, altrettanto fossero più intense le oscillazioni di tonicità. Bottazzi, in base a tale concetto, affermava: » che non si osservano le oscillazioni del tono nelle fibre muscolari che hanno raggiunto un grado più elevato di evoluzione e nelle quali il sarcoplasma è ridotto ad un minimum ». Ora noi ci troviamo, in seguito alle mie esperienze sui muscoli respiratori dei mammiferi, in condizioni di ragionamento quasi opposte, perchè in muscoli nei quali il sarcoplasma è scarsissimo abbiamo veduto prodursi delle oscillazioni di tonicità fortissime e pel loro aspetto identiche a quelle osservate negli animali inferiori da Fano e Bottazzi. Rimando il lettore ai tracciati che scrissi in un capitolo speciale e nella tavola VI della Memoria sulla respirazione di lusso (2): e alle ultime indagini che feci sull'azione dei centri spinali sulla tonicità dei muscoli respiratori. In base ai risultati che diedero i miei ultimi studî dove la contrazione tonica è nettamente seperata dalla contrazione ritmica del respiro, non si può ammettere pei muscoli dei mammiferi quanto ha supposto per quelli degli animali inferiori il Bottazzi « che il sarcoplasma riceva gli stimoli esterni e che li accumuli quando sono insufficienti, e che tutti i processi chimici e fisici che producono secondariamente il fatto meccanico della contrazione nella sostanza anisotropa del muscolo striato risiedano nel sarcoplasma ».

Noi siamo obbligati ad essere tanto più diffidenti in seguito ai nuovi fatti osservati, perchè già quando Bottazzi emise la sua ipotesi vi erano degli istologi valenti i quali negavano che il sarcoplasma sia una parte costituente normale della fibra muscolare.

Citerò fra questi A. von Kölliker (3) il quale disse « Das *Sarcoplasma* scheint mir der von Kühne nachgewiesene flüssige Besthandtheil der Muskelfasern zu sein... das gewisse Autoren irrthümlich als einen normalen Bestandtheil der Muskelfasern angesehen haben ».

Kölliker trovò in questa sostanza interstiziale dei granuli (interstitiellen Körner) che portano il suo nome e Knoll fece uno studio importante di questi granuli e del sarcoplasma nei muscoli striati (4).

(1) Archiv. für Physiologie 1901 Sup. Band, pag. 419.

(2) A. Mosso, Archives italiennes de Biologie, Tome VII, pag. 48.

(3) A. v. Kölliker, *Handbuch der Gewebelehre des Menschen.* I B, 1889, pag. 362.

(4) Ph. Knoll, *Ueber helle und trübe, weisse und rothe quergestreifte Musculatur.* Sitzungsberichte der k. Akad. d. W. Wien, B. XCVII, pag. 456, 24 oct. 1889.

Le ricerche dei fisiologi intorno alle funzioni del sarcoplasma sono discordanti e questo si capisce pensando all'estrema difficoltà che presenta lo sperimentare direttamente su tale sostanza.

Tra le ricerche che tendono a scemare l'importanza funzionale del sarcoplasma basta ricordare le osservazioni fatte da Engelmann (1), le quali dimostrarono che nella contrazione esce del liquido dalla sostanza isotropa per entrare nell'anisotropa. Certo questa affermazione dell'Engelmann ci allontana dal concetto pure così seducente del Bottazzi (2) « che il sarcoplasma sia un luogo ove si raccoglie l'energia non solo per il meccanismo proprio della sua funzione, ma anche per il materiale contrattile che si è differenziato nelle fibre striate ».

Del resto anche Bottazzi riconobbe che il sarcoplasma nei vari tessuti muscolari subì una differenziazione speciale nelle sue proprietà fondamentali: così che la loro irritabilità e contrattilità non dipendono più dalla quantità del solo sarcoplasma. È su questa base che dobbiamo cercare una nuova teoria la quale fondandosi sulla struttura anatomica delle fibre muscolari più differenziate, possa spiegare il fenomeno della tonicità e del duplice movimento quello rapido e quello tardo e simile alla contrazione dei muscoli lisci.

Teoria della duplice innervazione.

La doppia innervazione delle fibre striate trovata ora nei mammiferi, può spiegare meglio il fenomeno della tonicità dei muscoli. Bremer (3) osservò pel primo nel 1882 questa doppia innervazione: dopo vennero le ricerche di Grabower (4) il quale vide nei muscoli dell'uomo che oltre alla fibra midollata, penetra non raramente nell'apparecchio terminale una fibra non midollata.

Le ricerche recenti di Aldo Perroncito (5) mostrarono colla più grande evidenza che oltre alle fibre mieliniche che danno luogo alle arborizzazioni terminali, arriva in esse un secondo sistema di fibrille nervose di una finezza estrema che si comportano in una maniera caratteristica.

Questa duplice innervazione è un fatto anatomico importante, perchè i mutamenti che succedono nei muscoli per la contrazione lenta della tonicità

(1) T. W. Engelmann, *Mikroscopische Untersuchungen über die quergestreifte Muskelsubstanz.* Arch. f. d. g. Physiologie, 1873, vol. VII, pag. 155.

(2) Ph. Bottazzi, Arch. f. Physiologie 1901, Sup. Band, pag. 415.

(3) Bremer, *Ueber die Endingungen der markhaltigen und marklosen Nerven im quergestreiften Muskel,* Arch. f. mikr. Anatomie, Bd. 21, pag. 164.

(4) Grabower, *Ueber die Nervenendigungen im menschlichen Muskel.* Arch. f. mik. Anatomie Band 60, 1902, pag. 1.

(5) A. Perroncito, *Études ultérieures sur la terminaison des nerfs dans les muscles à fibres striées.* Archives italiennes de Biologie, tome 38°, 1902, pag. 393.

rassomigliano effettivamente a quelli che l'eccitazione del simpatico produce nei muscoli lisci dei vasi sanguigni, della vescica, delle intestina ecc. La funzione fisiologica va pienamente d'accordo colla struttura anatomica. Occupandosi delle placche motrici nei muscoli striati, Aldo Perroncito vide non solo che oltre alle fibre midollate che danno luogo alle tipiche arborizzazioni terminali, arriva un secondo sistema di fibre nervose di estrema finezza il quale entro alla stessa placca forma un' intreccio fine e caratteristico, ma egli affermò recentemente che queste siano diramazioni del simpatico (1).

È questo un campo nuovo di studi che si apre all' indagine. Sono dolente che questo mio scritto sembri un attacco alla dottrina di un mio Collega pel quale ho un'ammirazione profondissima: ma sono costretto a cercare un' ipotesi che metta meglio d'accordo la struttura anatomica colla funzione fisiologica dei muscoli negli animali superiori.

Il muscolo cardiaco è però una cosa tanto diversa dai muscoli respiratorî, e dai flessori delle dita da me studiati nell'uomo, che subito si affaccia il dubbio che sia inutile paragonare i fenomeni della tonicità studiati da Fano e Bottazzi con quelli da me esaminati. Non ho ricordato i fisiologi che accolsero favorevolmente la dottrina del Bottazzi, nè quelli che l'hanno combattuta, perchè ritengo superflua una tale discussione fino a che il Bottazzi si limita ad applicare la sua teoria agli animali inferiori. Ho dovuto parlarne perchè non trovai nei suoi scritti alcun cenno che escluda la possibilità di applicare la teoria del sarcoplasma ai mammiferi.

Ancora in un suo ultimo scritto il Bottazzi affermò (2): « che tutte le strutture ricche in sarcoplasma mostrano con maggior facilità i fenomeni della contrattura e del tono, e che queste appariscono sempre più forti quanto più un tessuto muscolare è ricco di sarcoplasma ». Tale affermazione non va d'accordo colle mie esperienze sulla contrattura e sulle oscillazioni della tonicità dei muscoli nell' uomo e negli animali superiori, nei quali è scarsissimo il sarcoplasma e sono invece spiccatissimi i fenomeni della contrattura e della tonicità, e però sono mio malgrado obbligato a cercare un'altra dottrina. Forse non sarà vera neppure questa della doppia innervazione; ma non sarà inutile aver formulato questo problema perchè altri lo risolva prima che io abbia il tempo di farlo.

Seguendo l'esempio di Fano e Bottazzi non sarà difficile decidere se la eccitazione del simpatico modifichi la contrazione dei muscoli striati nei mammiferi.

Dalle ricerche precedenti che fece il Bottazzi sull' *Emys europaea* (3)

(1) Aldo Perroncito, *Sulle terminazioni nervose nei muscoli a fibre striate.* Comunicazione fatta al Congresso della Società italiana di Patologia. Firenze 5, 7 ottobre 1903.

(2) Ph. Bottazzi, Archiv. f. Physiologie, 1901 Sup. Band, pag. 420.

(3) F. Bottazzi, Rivista di scienze biologiche. Aprile 1899.

e sull'esofago del rospo (1) risultò che: se si stimola il simpatico destro mentre l'atrio compie le note « oscillazioni del tono » l'effetto principale che si osserva consiste in un considerevole abbassamento generale e progressivo del tono del preparato muscolare, scomparsa o quasi delle oscillazioni del tono e notevole aumento dell'altezza delle contrazioni ritmiche elementari. L'effetto non segue immediatamente alla stimolazione. Tra l'inizio della stimolazione e la completa scomparsa delle oscillazioni, intercede un tempo considerevole durante il quale l'atrio qualche volta compie ancora una oscillazione. Se le oscillazioni del tono sono eccessivamente accentuate, la stimolazione del simpatico non riesce ad abolirle completamente.

Non possiamo però servirci di questi risultati per intravedere con l'induzione cosa succederà nei muscoli dei mammiferi; perchè si deve prima stabilire se le oscillazioni del tono osservate nei muscoli della respirazione nei mammiferi sono della stessa natura di quelle studiate da Fano e Bottazzi. L'affermazione di Gaskell (2) che egli non osservò mai nulla di simile nelle orecchiette della tartaruga di terra, lascia sorgere il dubbio che le oscillazioni del tono osservate da Fano e Bottazzi non siano un fatto normale. Ho provato ad aprire delle *Emys* robuste, speditemi da Ferrara appena raccolte, e non mi riuscì mai di osservare nelle orecchiette una modificazione della tonicità simile a quella che si vede nei tracciati. Neppure adoperando il microscopio riscontrai le oscillazioni del tono. Questo certo non basterebbe per affermare che manchino normalmente, sebbene nei vasi sanguigni, nell'esofago e nella vescica si vedano in condizioni normali le variazioni del tono.

Tutti coloro che hanno ripetuto le osservazioni di Fano e Bottazzi sul tono delle orecchiette nell'*Emys europaea*, sanno che i tracciati sono tanto più belli quanto più questi animali si conservano da lungo tempo nel laboratorio, la circolazione è languente, bassa la temperatura e cattiva la nutrizione: onde viene il dubbio che si tratti di un fenomeno che precede la morte del cuore: quando cioè non è più normale il ricambio fisiologico nel muscolo cardiaco.

Per questo il fenomeno non diviene meno importante; ma siamo obbligati a determinare con esattezza la sua natura per classificarlo. Succede nella tonicità dei muscoli, quanto si è veduto per le oscillazioni della pressione sanguigna nelle arterie dove ora si distinguono almeno quattro differenti specie di oscillazioni completamente simili nell'aspetto, le quali sono prodotte da meccanismi diversi e che devono perciò rimanere distinte per la natura loro. Tale classificazione apparisce necessaria anche per le oscillazioni del tono muscolare.

(1) Idem., Archives italiennes de Biologie. Tome 33, 1909, pag. 282.
(2) Schäfer, *Text-book of Physiology*, vol. 2, pag. 197.

Se le oscillazioni del tono studiate da Fano e Bottazzi fossero un fenomeno patologico, non sarebbe punto da meravigliarsi se l'eccitazione del simpatico avesse sul tono dei muscoli striati dei mammiferi un'azione diversa.

Fino ad ora non si è veduto che le fibre muscolari cardiache abbiano una doppia innervazione. Sarà utile fare delle indagini in questo campo; certo sarebbe un fatto importante se la doppia innervazione del cuore procedesse distinta fino dentro a ciascuna fibra; ma anche se questo si verificasse, credo non si potrebbero paragonare le oscillazioni del tono nei muscoli respiratori a quelle dell'atrio del cuore dell' *Emys europaea*, delle fibre liscie dell'esofago degli animali inferiori. Ammesso dunque che siano due cose diverse, credo essere scusato se oso lanciare un'ipotesi prima di averla provata e solo perchè essa mi sembra la spiegazione più semplice dei fenomeni da me osservati. Tanto nei muscoli del torace, quanto nel diaframma, non solo le oscillazioni della tonicità sono identiche a quelle dei vasi sanguigni e a quelle che studiai insieme con Pellacani [1] nella vescica dell'uomo, ma sono due fenomeni indipendenti fra loro; cosicchè mentre la tonicità presenta delle variazioni sue proprie, altre succedono in modo indipendente nel ritmo e nella forza dei moti più rapidi del respiro.

Secondo ogni probabilità il tono delle fibre muscolari sarebbe una funzione autoctona delle cellule nervose e specialmente di quelle del simpatico che si genera nei centri stessi. Le mie esperienze con Pellacani sui movimenti della vescica, dove abbiamo veduto che quest'organo poteva distendersi senza che si modificasse il tono delle fibre muscolari, prova che non si tratta di un riflesso che dipenda dagli eccitamenti periferici.

Vi è probabilmente nella struttura del muscolo una sostanza contrattile che reagisce a due eccitamenti, l'uno dei quali viene dalle fibre midollate e l'altro dalle fibre del simpatico.

Fisiologia. — *Esperienze fatte sulle scimmie colla depressione barometrica e sul Monte Rosa.* Nota del Socio A. Mosso.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] A. Mosso e P. Pellacani, Archives italiennes de Biologie. Tome I, 1882, pag. 97.

Fisica-matematica. — *Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica.* Nota I di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra (1).

È noto come le recenti esperienze in contradditorio eseguite dai signori Pender e Crémieu (2) abbiano messo ormai fuor di dubbio l'esistenza del campo magnetico prodotto da cariche elettriche in movimento.

L'analisi dei particolari delle esperienze positive del Pender e di quelle negative del Crémieu mostra come quelle del Crémieu, le quali sembravano smentire l'esistenza dell'effetto magnetico della convezione elettrica, differivano da quelle positive in questo, che i dischi elettrizzati mobili e le loro armature fisse, quando ne avevano, erano sempre ricoperti di sottili strati di caoutchouc.

Da uno studio sistematico fatto sull'influenza dei dielettrici solidi in questo fenomeno, i due illustri fisici, senza spiegare la parte che prendono nel fenomeno stesso i dielettrici, concludono che la causa dei resultati negativi del Crémieu sta appunto nei dielettrici, di cui i dischi o le armature erano ricoperti. Però in un'altra recente ricerca sullo stesso argomento (3) il sig. Vasilesco-Karpen, proponendosi anche di verificare, in seguito all'osservazione fatta in proposito dai signori Pender e Crémieu, se la presenza dei dielettrici, sia sul disco mobile sia sulle armature fisse, possa avere influenza sull'effetto magnetico, arriva a quest'altra conclusione: sull'effetto magnetico di una corrente di convezione la presenza dei dielettrici in strati sottili, sia sui dischi mobili, sia sulle armature fisse, è senza alcuna influenza. Su questa controversa questione e sulla ricerca delle cause dei risultati negativi delle esperienze del Crémieu, spetta naturalmente all'esperienza il decidere.

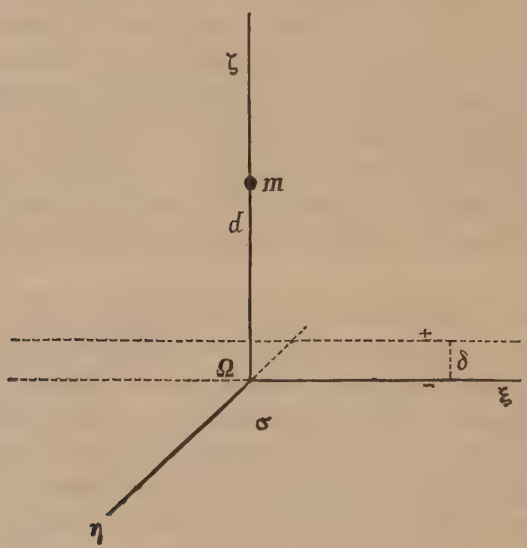
Si può però studiare la questione anche teoricamente, determinando, per es., quale alterazione porta nel campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito, la presenza di un sottile strato di un dielettrico solido, di spessore costante, disteso sul piano stesso. L'esposizione dei resultati ottenuti, forma l'oggetto della presente Nota; del problema enunciato si può dare però facilmente solo una soluzione approssimata, che differisce da quella rigorosa per quantità assolutamente trascurabili dal punto di vista

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

(2) Journal de Physique, Ser. IV. T. II, Sept. 1903: *Recherches contradictoires sur l'effet magnétique de la convection électrique.*

(3) Journal de Physique, Ser. IV, T. II, Sept. 1903: *Sur la convection électrique.*

pratico. Si è condotti al seguente resultato: « un sottile strato di un dielet-
« trico solido disteso uniformemente sul piano conduttore, al di sopra oppure
« al di sotto, non porta alterazione sensibile al campo elettromagnetico gene-
« rato dalla carica in moto, quando si trascurano i termini in a^2, essendo
« a il rapporto fra la velocità di convezione e quella della luce: è preci-
« samente la conclusione del sig. Vasilesco-Karpen ».



1. È noto come il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica m, che si muove con una velocità costante c sopra una retta parallela ad un piano conduttore indefinito σ, sia stato determinato e completamente studiato dal prof. Levi-Civita in una Memoria inserita negli Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse ([1]). Estendendo opportunamente il metodo del prof. Levi-Civita si può, come vedremo, tener conto assai semplicemente anche dell'influenza del dielettrico; per es. una lamina di mica che ricopre sopra una faccia lo schermo metallico.

Sia d la distanza della carica m dal piano σ, e sia $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$ un sistema di assi mobili invariabilmente legati ad m, aventi σ per piano $\zeta = 0$ ed m sul semiasse positivo delle ζ. Quando manca il piano conduttore i potenziali ritardati del campo sono

$$(1) \qquad F' = \frac{m}{\Delta}\ ,\ U' = \frac{m\,a}{\Delta}\ ,\ V' = 0\ ,\ W' = 0$$

([1]) 2e Série, T. IV.

essendo

$$a = \mathrm{A}\,c\ ,\quad \Delta^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2]$$

ed A l'inversa della velocità della luce nel mezzo ambiente che è l'etere.

L'introduzione nel campo del piano conduttore σ, sul quale si trova un sottile strato uniforme di un dielettrico solido omogeneo, che supponiamo per es., dalla parte delle ζ positive, porta delle modificazioni nel campo stesso. Infatti il moto della carica m dà origine ad una variabile distribuzione di elettricità indotta sul piano conduttore, ed inoltre ad una pure variabile distribuzione, sulle due faccie del dielettrico che ricopre il piano, di due strati di elettricità di densità uguale e di segno contrario. Per i punti a distanza finita dal sottile strato dielettrico disteso su σ, le azioni derivanti dalla sua polarizzazione si possono assimilare a quelle prodotte da un doppio strato disteso su σ. Si tratta quindi di determinare il potenziale elettrostatico ritardato F_1, ed il potenziale vettore di componenti U_1, V_1 secondo $\xi\,\eta$ (la componente W_1 secondo ζ è naturalmente nulla) corrispondenti alla distribuzione ed alle correnti indotte.

Noti questi potenziali si sa [1] che le componenti della forza elettrica X, Y, Z secondo $\xi\,\eta\,\zeta$, e quelle della forza magnetica L, M, N del campo così prodotto sono:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = -\dfrac{d}{d\xi}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_1) + a\dfrac{d}{d\xi}(\mathrm{U}' + \mathrm{U}_1)\,, \\ \mathrm{Y} = -\dfrac{d}{d\eta}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_1) + a\dfrac{d\,\mathrm{V}_1}{d\xi}\,, \\ \mathrm{Z} = -\dfrac{d}{d\zeta}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_1)\,; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{d\mathrm{V}_1}{d\zeta}\,, \\ \mathrm{M} = -\dfrac{d}{d\zeta}(\mathrm{U}' + \mathrm{U}_1)\,, \\ \mathrm{N} = \dfrac{d}{d\eta}(\mathrm{U}' + \mathrm{U}_1) - \dfrac{d\,\mathrm{V}_1}{d\xi}\,. \end{cases}$$

Vediamo quindi a quali condizioni debbono soddisfare F_1, U_1, V_1 come funzioni di $\xi\,\eta\,\zeta\,t$. Il fenomeno essendo stazionario rispetto agli assi mobili $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$, queste funzioni non dipenderanno esplicitamente dal tempo; come potenziali ritardati corrispondenti a distribuzioni superficiali, sia di semplice che di doppio strato, saranno soluzioni dell'equazione

$$(4)\qquad \Box f = (1-a^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = 0$$

[1] Levi-Civita, Mem. cit. pag. 26.

e dovranno inoltre soddisfare all' equazione di continuità, che diviene anche in questo caso (1)

$$(5) \qquad a\frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta}.$$

Si osservi ora che il potenziale elettrostatico F_1 si può considerare somma di due potenziali, cioè del potenziale F_2 corrispondente ad una distribuzione di semplice strato, dovuta all' elettricità indotta sul piano conduttore, e del potenziale ψ corrispondente ad una distribuzione di doppio strato, dovuta alla polarizzazione del dielettrico, e di cui indichiamo con μ il momento.

Vediamo quello che avviene per il potenziale vettore. Il moto della carica m, mentre dà origine sul piano σ a correnti di conduzione, provoca nel coibente un doppio strato variabile. Distribuzione variabile equivale a corrente, e di questo bisogna quindi tener conto nel valutare il potenziale vettore. Per la stazionarietà del fenomeno rispetto alla carica mobile le cose vanno come se un doppio strato di momento $\mu\,(\xi\,\eta)$, rigidamente collegato colla carica, scorresse con velocità c parallelamente all' asse ξ secondo cui avviene la traslazione. Ricordando che il doppio strato è caso limite di due semplici opposti, si vede quindi che questo moto dà origine ad una, chiamiamola così, corrente superficiale di doppio strato di componenti $c\,\mu$, o secondo $\xi\,\eta$. Anche la componente U_1 secondo ξ del potenziale vettore, resulterà quindi della somma di due potenziali: del potenziale U_2 di semplice strato dovuto alle correnti di conduzione sul piano σ, e del potenziale dovuto alla corrente superficiale di doppio strato prodotta nel coibente, cioè $A\,c\,\psi$. Per la componente V_1 del potenziale vettore si ha che essa resulta di un potenziale di semplice strato, quindi, indicandola per simmetria con V_2, avremo:

$$(6) \qquad \begin{cases} F_1 = F_2 + \psi\,, \\ U_1 = U_2 + a\psi\,, \\ V_1 = V_2\,. \end{cases}$$

F_2, U_2, V_2, potenziali corrispondenti a distribuzione di superficie sul piano σ, si comportano come potenziali ordinari, e le loro espressioni analitiche, sotto forma di integrali estesi al piano σ, non mutano col variare il segno di ζ, sono quindi funzioni di $|\zeta|$. Invece ψ ha le proprietà caratteristiche dei potenziali di doppio strato, e la sua espressione analitica, sotto forma di integrale esteso al piano σ, muta col variare del segno di ζ. Essa assume quindi nei punti simmetrici rispetto al piano σ valori uguali ma di segno contrario. Se indichiamo con ψ_+ il valore verso cui converge ψ quando ci

(1) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 24.

si avvicina indefinitamente allo strato dalla parte delle ζ positive, con ψ_- il valore verso cui converge ψ quando ci si avvicina dall'altra parte, con $\psi_.$ il valore nell'interno del doppio strato avremo, come è noto,

$$\psi_+ = 2\pi\mu + \psi_. \; ; \; \psi_- = -2\pi\mu + \psi_. \; , \tag{7}$$

essendo μ il momento del doppio strato; e per essere $\psi_+ = -\psi_-$ sarà quindi

$$\psi_+ = -\psi_- = 2\pi\mu \; ; \; \psi_. = 0 \, . \tag{8}$$

Le quattro incognite F_2, U_2, V_2, ψ, da cui dipende la soluzione del problema, oltre soddisfare alle condizioni precedentemente dette, devono poi essere soluzioni della (4) cioè dell'equazioni indefinite

$$\square F_2 = 0 \; , \; \square U_2 = 0 \; , \; \square V_2 = 0 \; , \; \square \psi = 0 \, , \tag{9}$$

e dell'altra:

$$a \frac{dF_2}{d\xi} = \frac{dU_2}{d\xi} + \frac{dV_2}{d\eta} \tag{10}$$

a cui si riduce la (5). Resta da tener conto delle ulteriori condizioni cui debbono soddisfare i nostri potenziali per rispecchiare il comportamento fisico del piano conduttore e dello strato dielettrico ad esso sovrapposto. Per questo è opportuno premettere alcune considerazioni di indole generale, che saranno esposte in una prossima Nota.

Fisica. — *Azione del radio sulla scintilla elettrica.* Nota del prof. A. Stefanini e del dott. L. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Appunti mineralogici sulla Pegmatite di Olgiasca* (Lago di Como). Nota di Emilio Repossi, presentata dal Socio G. Struever (1).

In una Nota preliminare sui minerali della Pegmatite di Olgiasca (2) il compianto conte G. Melzi enumerava fra gli elementi mineralogici costitutivi di questa roccia, oltre all'*ortoclasio*, al *quarzo*, alla *muscovite*, alla *tormalina* ed al *granato*, anche il *rutilo*, e di quest'ultimo dava un breve cenno cristallografico, constatandovi l'esistenza di una nuova forma }311{.

Il fatto della presenza del *rutilo* in simile genere di roccia e la frequenza ne' suoi cristalli di una forma nuova per la specie, m'indussero a ritornare sull'argomento, cosa che sicuramente non avrebbe mancato di fare il Melzi, se da immatura morte non fosse stato tanto presto rapito alla scienza.

Considerando che nelle rocce pegmatitiche, assai più frequentemente del *rutilo*, si trova lo *zircone*, e che in quest'ultimo minerale la forma }311{, nuova pel *rutilo*, è invece molto comune, diressi le mie ricerche allo scopo di constatare se, per avventura, i cristallini bruni, lucenti, tetragonali, studiati dal Melzi, non fossero di *zircone* piuttosto che di *rutilo*.

I risultati del mio studio, che espongo in appresso, corrisposero pienamente alle fatte supposizioni; tutti i cristalli esaminati sono di *zircone*.

Ebbi a mia disposizione un abbondante materiale, in gran parte da me raccolto, e su di esso potei eseguire misure cristallografiche abbastanza soddisfacenti ed una prova microchimica con risultato decisivo.

I cristallini in discorso, come bene notò il Melzi (3), si trovano nella Pegmatite di Olgiasca specialmente alla superficie dei granati, ma pure non di rado sono compresi fra gli altri elementi della roccia ed in particolare nella mica; sono di color bruno, talvolta molto scuro, lucenti, piuttosto piccoli, non superando i quattro millimetri nella maggiore dimensione, e presentano quasi costantemente la combinazione: {100{ }110{ }111{ }311{, molto comune nello *zircone*.

Ho misurato quattro cristalli fra i meno incompleti ed i meno imperfetti, e ne ottenni i risultati che riassumo nella seguente tabella, mettendoli

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

(2) G. Melzi, *Di un nuovo giacimento mineralogico interessante sulle sponde del laghetto di Piona.* (Giornale di Miner., Cristall. e Petrogr. di F. Sansoni, vol. I, fasc. 1°; Milano, 1890).

(3) Mem. cit.

a riscontro coi valori calcolati in base al rapporto $a : c = 0{,}640373$ dato dal Dana (1).

Spigoli misurati	Angoli osservati. Medie	Angoli calcolati	n.	Limiti delle osservazioni
	°	°		° ′ — ° ′
100 . 010	90	90	4	89.29 — 90.27
100 . 110	45. 5	45	10	44.17 — 45.36
100 . 111	61.27	61.40	16	60.43 — 62.31
100 . 311	31.42	31.43	11	31.13 — 32. 2
100 . 131	73.32	73.32	7	72.49 — 74.30
110 . 111	47.38	47.50	5	46.50 — 48.36
110 . 311	36.18	36.41	2	36.15 — 36.21
111 . 311	30. 3	29.57	16	29.32 — 30.49
111 . 1$\bar{1}$1	56.19	56.40	9	55.40 — 56.43
111 . $\bar{1}$11	84.26	84.20	3	84. 2 — 84.48
1$\bar{1}$1 . 311	52.41	53.19	3	52. 2 — 53.15
311 . 131	47.23	47.17	2	47. 1 — 47.45
311 . 3$\bar{1}$1	33.6	32.57	4	32.30 — 33.52

Dei quattro cristalli misurati, tre hanno le facce della zona prismatica un po' smosse e solo uno ha fornito per tutti gli angoli misure che poco si distaccano dai valori calcolati: per altro, come si può rilevare dalla tabella riportata, gli angoli misurati un maggior numero di volte e quelli tra le facce piramidali hanno dato valori abbastanza soddisfacenti.

Alcuni cristalli furono frantumati ed osservati al microscopio immersi in essenza di garofano. I frammentini si presentano trasparenti, con una tinta bruno-violacea chiarissima, ben diversa dal giallo intenso del *rutilo*; la birifrazione è viva e forte, ma non raggiunge assolutamente l'alto valore di quella di quest'ultimo minerale

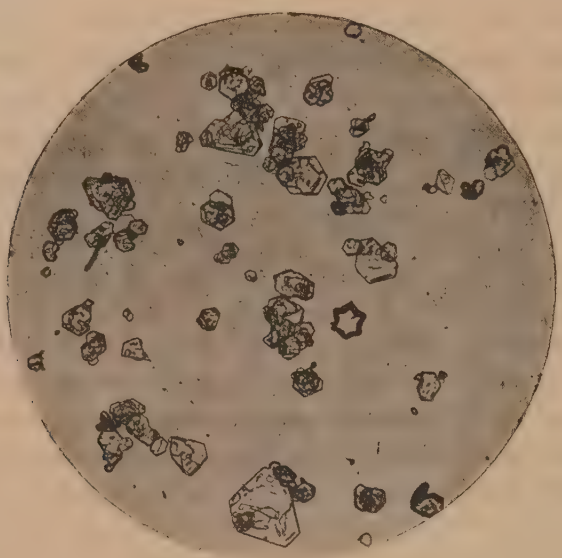
Per la prova microchimica ho seguito il metodo suggerito da A. Michel Lévy e da L. Bourgeois (2), eseguendo prima per controllo la medesima prova sopra un frammento staccato da un grosso cristallo di *zircone* di provenienza americana.

(1) J. Dana, *System of Mineralogy*, 6ª ed., London, 1892.

(2) A. Michel Lévy et L. Bourgeois, *Sur les formes cristallines de la zircone et les déductions à en tirer pour la détermination qualitative du zircon.* (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, tome 94°, Paris, 1882).

Avendo in questa prova preliminare ottenuto risultati perfettamente conformi a quelli dei detti autori, ripetei l'esperienza sopra uno dei cristallini provenienti da Olgiasca, ponendomi naturalmente nelle identiche condizioni.

Il risultato al quale giunsi in questa seconda prova fu tanto soddisfacente, che credo non inutile descrivere ne' suoi particolari l'andamento dell'esperienza.



Macinai nel mortaio di Abich, indi in mortaio d'agata, gr. 0.0295 di *zircone* sino a ridurli in polvere finissima e ad essi aggiunsi, secondo le indicazioni degli autori, una quantità doppia di carbonato di soda, pure previamente macinato. Raccolta la mescolanza in un piccolo crogiuolo di platino, la esposi per lo spazio di pochi minuti al moderato riscaldamento di una fiamma Bunsen, perchè la fusione si iniziasse, e quindi la portai alla soffieria, spingendo il riscaldamento fino al rosso chiaro. Mantenni a questa alta temperatura il crogiuolo per cinque minuti, al termine dei quali diminuii a grado a grado l'intensità della fiamma, in modo che la masserella fusa passasse lentamente dal rosso chiaro al rosso ciliegia e quindi si raffreddasse.

La massa solidificata, che, tanto con lo *zircone* americano come con quello di Olgiasca, era di un marcato color verde erba, probabilmente per tracce di sali di manganese, fu in seguito lisciviata più volte con acqua calda e ne ottenni una polvere pesante, incolora o giallognola, che, osservata al microscopio, si mostrò formata unicamente da lamelle esagonali di ossido di zirconio.

Queste lamelle, che non sono sensibilmente attaccate dagli acidi, come potei verificare lavandole con acido cloridrico diluito per liberarle da tenui

impurità, hanno per la grande maggioranza la forma di esagoni più o meno regolari o di griglie esagonali. L'unita figura dimostra l'aspetto delle lamelle di zirconia ottenute dai cristallini di Olgiasca ed ingrandite di 116 diametri.

Rare sono le forme stellate simili a quella che si vede quasi nel centro della microfotografia qui riportata: esse hanno tutte una stretta bordatura e sono leggermente giallognole.

Le lamelle di zirconia hanno uno spessore vario, sempre non molto grande, e sono non di rado sovrapposte in pila, come notò A. Michel Lévy. Osservando nei preparati in balsamo il comportamento della linea di Becke, si rileva che, contrariamente a quanto dice il Weinschenk ([1]), le lamelle di zirconia hanno un potere rifrangente molto più alto di quello del balsamo del Canadà. Tutte, anche quelle stellate giallognole, osservate normalmente alla base, mostrano a luce convergente un unico asse ottico negativo normale alla base stessa ([2]); nessuna traccia di anomalie ottiche.

Operando nel modo descritto e curando in particolare che il raffreddamento della massa fusa sia graduale, le lamelle esagonali che si ottengono hanno, contrariamente a quanto afferma il Behrens ([3]), discrete dimensioni e non sono accompagnate da romboedri di zirconiato di soda, che disturbino lo studio dei prodotti della reazione.

Sui minerali dei filoni pegmatitici di Piona fu recentemente pubblicata un'altra Nota dell'Ing. S. Bertolio ([4]), nella quale si dà notizia della presenza in essi del *berillo*. In questa Nota il Bertolio si occupa anche dei feldispati contenuti nella Pegmatite di Olgiasca, per i quali appunto viene industrialmente sfruttata, e ricorda come fra questi, oltre all'*ortoclasio* predominante, siano da menzionare il *microclino*, l'*albite* in accrescimento pertitico col *microclino* ed un feldispato sodico-calcico di tipo *oligoclasio-albite*.

L'esistenza di quest'ultimo feldispato fu dal Bertolio controllata con una prova microchimica, ma nella Nota citata non sono riferiti i relativi dati ottici, sicchè non mi parve inutile ritornare sull'argomento per completare anche sotto quest'ultimo aspetto lo studio dell'interessante roccia.

I risultati ai quali giunsi con l'esame ottico del feldispato in discorso, sono un po' diversi da quelli ai quali giunse il Bertolio.

Esaminai due grossi individui cristallini provenienti da due diversi esemplari. Sopra varie laminette di sfaldatura secondo la faccia (010) staccate dal primo individuo ottenni per l'angolo di estinzione medio un valore di + 19°,

([1]) E. Weinschenk, *Die gesteinbildenden Mineralien*, pag. 29 (Freiburg, 1901).

([2]) A. Michel Lévy, *Les minéraux des roches*, pag. 118 (Paris, 1888).

([3]) H. Behrens, *Anleitung zur mikrochemischen Analyse* (Hamburg u. Leipzig, 1899).

([4]) S. Bertolio, *Sui filoni pegmatici di Piona e sulla presenza in essi del Berillo* (Rend. R. Istit. Lomb., serie II, vol. XXXVI, 1903).

con un massimo di + 21°, ed un minimo di + 17°; su molte altre lamelle staccate dal secondo individuo ottenni invece un angolo medio di + 16°, con un massimo di + 18° ed un minimo di + 14°.

Sopra laminette di sfaldatura secondo la (001) ottenni nel primo individuo un angolo d'estinzione medio di + 4° 1/3 con un massimo di + 5° ed un minimo di + 3° 1/2, e nel secondo individuo un angolo medio un po' superiore a + 3° con un massimo di + 4° 1/2 ed un minimo di + 2° 1/2.

Questi valori degli angoli d'estinzione, ed in ispecie quelli più significativi sulla (010), dimostrano che il plagioclasio della Pegmatite di Olgiasca è di tipo *albite* e non *oligoclasio-albite*, quantunque alcuni individui si avvicinino ad un tipo intermedio fra questi due, ciò che può spiegare il risultato della prova microchimica ricordata.

Risultati perfettamente concordanti con quelli ora riferiti ottenni dalla misura degli indici di rifrazione, che eseguii col totalrefrattometro Abbe-Pulfrich sopra facce di sfaldature abbastanza larghe ed opportunamente lisciate dei detti individui.

Nel primo individuo trovai

$$\alpha = 1.5285$$
$$\beta = 1.5316$$
$$\gamma = 1.5386$$

nel secondo individuo ebbi

$$\alpha = 1.5321$$
$$\beta = 1.5352$$
$$\gamma = 1.5409$$

Tutti questi valori s'intendono per la riga *D* del sodio.

Da ultimo ricorderò, che nella Pegmatite di Olgiasca venne recentemente trovata anche l'*apatite*, ma in forme ed in quantità tali da non meritare uno studio particolareggiato.

Fisiologia. — *Modificazioni del riflesso della deglutizione, studiate nella Capanna Regina Margherita (m. 4560 s. m.)* [1]. Nota di G. Galeotti, presentata dal Socio A. Mosso [2].

I disturbi che da parte dello stomaco si osservano nel mal di montagna e che certamente dipendono da una alterazione funzionale dei centri motori del tubo digerente, hanno fatto sorgere l'idea che anche il riflesso della deglutizione, così intimamente collegato con le funzioni dello stomaco, potesse venir in qualche maniera modificato per le variate condizioni in cui l'organismo si trova quando sia trasportato a grandi altezze. Per questo il

(1) Lavoro eseguito nella quarta spedizione sul Monte Rosa diretta dal prof. A. Mosso.
(2) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

prof. Mosso mi suggerì di studiare il riflesso della deglutizione su me stesso e sull'inserviente Luigi Magnani, tanto durante il soggiorno a Torino, quanto nella nostra permanenza alla Capanna Regina Margherita.

Il riflesso della deglutizione si può studiare con vari metodi, tra cui il migliore è quello di Kronecker e Meltzer, che consiste nello scrivere mediante due palloni introdotti nella faringe e nell'esofago le contrazioni di questi organi. Ma, tenuto conto della molestia che queste ricerche recano e delle condizioni speciali in cui dovevo sperimentare, dovetti limitarmi al metodo della ispezione e registrazione esterna, che eseguii applicando sulla laringe un tamburo in congiunzione con una capsula di Marey e scrivendo sul cilindro i movimenti di questo organo, mentre si beve un liquido qualsiasi. Inoltre ho tenuto conto del tempo che intercede tra il movimento della laringe eseguito nell'inghiottire un sorso di liquido, e il rumore di gorgoglio che si verifica al cardias allorchè l'acqua cade dall'esofago nello stomaco.

Il primo metodo può in ispecie servire a studiar la fatica di questo atto riflesso così complicato, ed è appunto a tal fine che io me ne sono servito, poichè ci interessava anzitutto vedere come, nelle cambiate condizioni in cui si trovano i centri nervosi per il soggiorno a grandi altezze, varino la loro resistenza e la loro capacità di rispondere agli stimoli fisiologici che determinano l'atto medesimo.

Il secondo metodo può servire invece alla investigazione d'un altro lato del problema, cioè allo studio della capacità motoria di tutti gli apparecchi muscolari che entrano in giuoco nella deglutizione, ma specialmeote di quelli che costituiscono la tunica contrattile dell'esofago: ora appunto ci interessava riconoscere se tale capacità motoria si trovasse ad essere modificata durante la permanenza in alta montagna. Questo metodo serve insomma a determinare con una certa approssimazione la rapidità con cui le sostanze inghiottite percorrono l'esofago. Su tale argomento sussistono tra i fisiologi controversie notevoli, e quindi mi è necessario riassumere in breve la questione.

Secondo Heurmann [1] ed altri e secondo anche esperienze più recenti di Cannon e Moser [2], le sostanze inghiottite, specialmente se liquide o semiliquide, traversano l'esofago con una grande velocità, per il solo effetto della propulsione esercitata dai muscoli miloioidei, durante la loro rapida contrazione.

Secondo Magendie [3] e Milne Edwards [4] invece, il bolo alimentare percorre lentamente l'esofago, impiegando talvolta due o tre minuti per questo

[1] Heurmann, *Physiologie*. Vol. III. Copenhague et Leipzig 1753, pag. 364.

[2] Cannon and Moser, American Journal of Physiology 1898.

[3] Magendie, *Précis élémentaire de Physiologie*. Vol. II, Paris 1825, pag. 63.

[4] Milne Edwards, *Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée*. Vol. IV, pag. 274.

tragitto, e la sua progressione sarebbe determinata da un riflesso che venne studiato da Angelo Mosso (1).

Kronecker (2), che si è occupato assai dell'argomento, ebbe occasione di visitare nella clinica di Bergmann un malato con una fistola gastrica tanto grande, da permettere l'entrata d'una mano dentro lo stomaco, e così potè constatare che l'acqua penetra nello stomaco circa 6 secondi dopo che è stata inghiottita. Meltzer (3), che studiò sopra animali di cui aveva messo allo scoperto lo stomaco, non vide mai passar l'acqua attraverso il cardias subito dopo che era stata inghiottita, ma circa 6 o 8 secondi dopo e mercè la contrazione della parte inferiore dell'esofago.

Anche per riguardo ai rumori che si possono ascoltare durante gli atti della digestione, si hanno controversie notevoli.

Zenker (4) distingue un primo rumore che si può ascoltare nella parte inferiore delle vertebre cervicali, un secondo che si sente in corrispondenza della nona vertebra dorsale, ed infine un terzo rumore in corrispondenza dell'ultimo spazio intercostale sinistro. Il primo rumore corrisponderebbe al momento in cui le pareti faringee si chiudono sulla sostanza inghiottita, il secondo, che si ascolta circa un minuto secondo dopo che il dito posato sulla laringe ha sentito prodursi la deglutizione, dipenderebbe dal passaggio rapido del liquido attraverso l'esofago; il terzo, che si produce circa 7 secondi dopo il movimento della laringe, sarebbe determinato dalla iniezione nello stomaco dell'aria inghiottita insieme al bolo alimentare.

Hamburger poi concludeva dalle sue esperienze che, tra il momento in cui la deglutizione comincia nella faringe e quello in cui il liquido inghiottito provoca il rumore in corrispondenza della ottava costa, c'è un certo intervallo, ma tanto piccolo che si distingue appena.

Quincke (5) ha potuto ascoltare due gorgoglii: uno che egli chiama primario e che si può ascoltare subito dopo il movimento della laringe, l'altro, secondario, che ha luogo 4-5 secondi più tardi: perchè abbia luogo questo secondo gorgoglio è necessario che il liquido inghiottito sia mescolato con aria. Queste differenze di risultati si possono spiegare pensando che, tanto la velocità con cui le sostanze inghiottite percorrono l'esofago, quanto i rumori che si possono udire in questo passaggio, dipendono principalmente dalla po-

(1) A. Mosso, *Movimenti dell'esofago*. Giornale della R. Accademia di medicina in Torino 1873 e Moleschott's, *Untersuchungen zur Naturlehre*. Vol. XI, 4, pag. 11.

(2) Kronecker, *Die Schluckbewegung*. Berlin 1884, pag. 23. — Déglutition. *Dictionnaire de Physiologie par Ch. Richet*. Vol. IV, Paris, 1900.

(3) Meltzer, *Centralbl. f. med. Wissensch.* 1883 e *Further experimental contribution to the knolewdge of the mecanism of deglutition*. American Journal of exper. med. 1897. Vol. II, pag. 458.

(4) Zenker, *Ueber die Schluckgeräusche*, Berl. klin. Wochenschrift 1884, n. 3, pag. 38.

(5) Quincke, *Ueber Luft-schlucken und Schluckgeräuschen*. Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakl. Vol. XXII, pag. 385.

sizione dell'individuo in esperimento e secondariamente dallo stato delle sostanze inghiottite, cioè se liquide o semiliquide o solide, e infine anche dalla quantità della sostanza che in una volta si inghiottisce.

Si possono dunque fare esperienze comparabili tra loro, soltanto se si ha cura che il soggetto mantenga in tutte la stessa posizione e inghiottisca lo stesso liquido, a sorsi uguali e nell'identico modo.

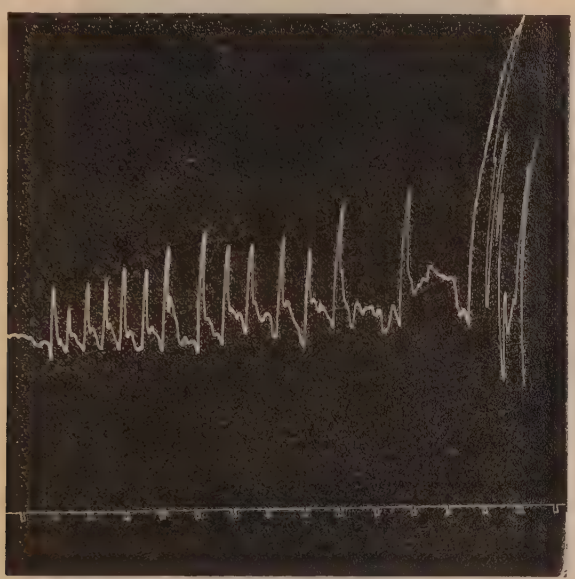


Fig. 1. — Deglutizioni tra una inspirazione e l'altra — Galeotti a Torino — Tempo: 2 secondi.

Le esperienze col metodo grafico destinate, come ho già detto, a studiare la fatica del centro della deglutizione, furono fatte mediante un tamburo fissato sulla laringe e congiunto con una capsula di Marey. Mentre la penna di questa scriveva sul cilindro registratore, bevevo un bicchiere di acqua a piccoli sorsi, affrettando quanto più potevo i movimenti di deglutizione e trattenendo il respiro finchè non potevo più in alcun modo deglutire. Se tra un atto di deglutizione e l'altro si interpone una buona pausa o si eseguisce una profonda inspirazione, allora non si ha più la fatica e la deglutizione può proseguire indefinitamente.

A Torino, sperimentando su me stesso, ottenni parecchie curve del tipo rappresentato nella fig. 1: in essa si vede come gli intervalli tra un atto di deglutizione e l'altro vadano regolarmente aumentando e come il movimento della laringe divenga sempre maggiore, ciò che indica che lo sforzo dei

muscoli della deglutizione cresce per la fatica, finchè poi il loro movimento diviene impossibile.

Nell'inserviente Magnani ho potuto osservare un fatto analogo. (V. fig. 2).

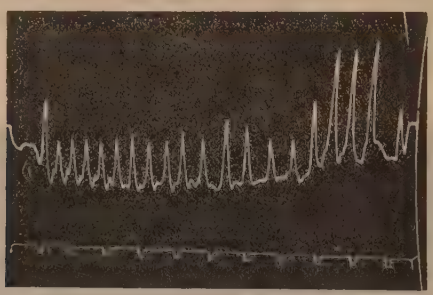


Fig. 2. — Deglutizioni tra una inspirazione e l'altra — Magnani a Torino — Tempo: 2 secondi.

Alla Capanna Regina Margherita queste esperienze, ripetute nello stesso modo, hanno dato risultati somiglianti, salvo che il numero degli atti di

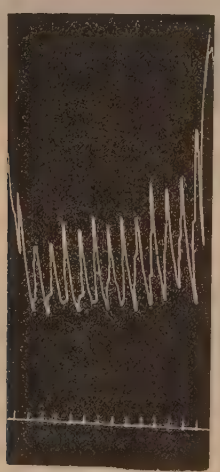


Fig. 3. — Deglutizioni tra una inspirazione e l'altra — Magnani nella Capanna Regina Margherita — Tempo: 1 secondo.

deglutizione fra una inspirazione profonda e l'altra sono meno numerosi e più ravvicinati tra loro, come infatti si può vedere dalla fig. 3 e dalla tabella che segue.

Numero degli atti di deglutizione eseguiti tra una inspirazione profonda e l'altra.

Galeotti		Magnani	
a Torino	nella Capanna Regina Margherita	a Torino	nella Capanna Regina Margherita
14	9	16	8
16	8	19	8
14	10	16	9
16	10	19	12
12	10	16	14
19	9	16	10
14	9	16	12
16	8	19	11
19	—	—	12
media 15	media 9	media 17	media 9

Ora è certo che su questo numero degli atti di deglutizione tra una inspirazione profonda e l'altra, ha una influenza preponderante la capacità che possiede l'individuo in esperimento di arrestare il respiro, e tal capacità, come risulta da altre ricerche del prof. Mosso, varia assai col diminuire della pressione barometrica.

In generale, e questo è anche il caso del Magnani, a grandi altezze è considerevolmente minore il tempo durante il quale è possibile trattenere il respiro e quindi tal fatto può apparire una ragione sufficiente per ispiegare la diminuzione degli atti di deglutizione tra una inspirazione e l'altra; ma nel mio caso, per riguardo all'arresto del respiro, si è verificato il fenomeno opposto, cioè ,io poteva trattenere il respiro più lungamente allorchè mi trovava nella Capanna Regina Margherita che non a Torino, mentre il numero degli atti di deglutizione era, come per il Magnani, diminuito. È lecito quindi pensare che per l'arresto della deglutizione, oltre il bisogno di respirare, valga anche la fatica del centro che presiede alla deglutizione medesima, e che la fatica di esso insorga più presto allorchè l'organismo si trova a grandi altezze.

Per determinare il tempo che intercorre tra il movimento della laringe durante la deglutizione e il gorgoglio che si verifica al cardias, allorchè il liquido passa dall'esofago nello stomaco, procedevo così. Il soggetto doveva restare disteso con la testa leggermente sollevata. Sulla regione del cardias applicavo il padiglione di uno stetoscopio biauricolare, poi ponevo una mano sulla laringe del soggetto, mentre nell'altra tenevo un cronoscopio che facevo andare, appena sentivo il movimento della laringe nella deglutizione di una

certa quantità d'acqua che il soggetto teneva in bocca, e fermavo non appena ascoltavo il gorgoglio. Naturalmente ripetevo queste osservazioni per un certo numero di volte, ottenendo in generale valori abbastanza concordanti.

Ecco i risultati di tali esperienze.

Tempo intercorrente tra il movimento della laringe nella deglutizione e il gorgoglio al cardias.

A Torino:

Esp. 1ª. 9 luglio, ore 16. Luigi Magnani:
secondi: 5,7 - 5,6 - 5,8 - 5,7 - 4,7 - 5,8 - 6,2 - 5,8 = media: **5,6.**

Esp. 2ª. 10 luglio, ore 10. Luigi Magnani:
secondi: 5,0 - 5,2 - 5,0 - 5,8 - 5,0 - 5,4 - 5,4 - 5,6 - 5,2 - 5,4 = media: **5,3.**

Esp. 3ª. 10 luglio, ore 16. Luigi Magnani:
secondi: 5,4 - 5,8 - 5,4 - 5,2 - 56 - 5,4 - 5,4 - 5,6 - 5,8 - 5,4 - 54: = media: **5,5.**

Esp. 4ª. 10 luglio, ore 16. Galeotti:
secondi: 4,8 - 4,6 - 4,4 - 4,8 - 4,8 - 5,0 - 4,6 - 4,6 - 4,6 - 5,0 = media: **4,7.**

Esp. 5ª. 11 luglio, ore 10. Galeotti:
secondi: 4,7 - 4,6 - 4,8 - 4,8 - 4,8 - 4,6 - 4,5 - 4,4 - 4,8 - 5,2 = media. **4,7.**

Esp. 6ª. 12 luglio, ore 16. Galeotti:
secondi: 4,6 - 4,8 - 4,7 - 4,8 - 4,4 - 4,4 - 4,4 - 4,6 - 4,8 - 4,8 - 4,8 = media: **4,6.**

Esp. 7ª. 14 luglio, ore 16. Galeotti:
secondi: 4,7 - 4,7 - 4,8 - 4,9 - 4,8 - 4,7 - 4,6 - 4,7 - 4,4 - 4,8 = media: **4,7.**

Nella Capanna Regina Margherita:

Esp. 1ª. 19 agosto, ore 16. Luigi Magnani:
secondi: 3,6 - 3,6 - 4,1 - 3,5 - 4,1 - 3,5 - 3,3 - 4,3 - 3,3 - 3,4 = media: **3,6.**

Esp. 2ª. 22 agosto, ore 17. Luigi Magnani:
secondi: 3,2 - 3,0 - 3,4 - 3,0 - 3,2 - 3,3 - 3,4 - 3,0 - 3,6 - 3,4 - 3,2 = media: **3,2.**

Esp. 3ª. 23 agosto, ore 18. Luigi Magnani:
secondi: 3,6 - 3,2 - 3,0 - 3,5 - 3,2 - 3,4 - 3,8 - 3,0 - 3,4 - 3,2 = media: **3,3.**

Esp. 4ª. 22 agosto. ore 17. Galeotti:
secondi: 3,8 - 3,8 - 3,6 - 3,8 - 3,8 - 3,8 - 3,8 - 3,6 - 3,4 - 3,8 - 3,6 = media: **3,7.**

Esp. 5ª. 23 agosto, ore 18. Galeotti:
secondi: 3,5 - 4,0 - 3,4 - 3,4 - 3,6 - 3,7 - 3,4 - 3,2 - 3,4 - 3,4 = media: **3,5.**

Esp. 6ª. 24 agosto. Galeotti:
secondi: 3,6 - 3,4 - 3,7 - 3,8 - 3,8 - 3,8 - 3,7 - 3,6 - 3,7 - 3,5 = media: **3,6.**

Come si vede, le varie cifre di ogni esperienza diversificano poco tra loro, talchè si può considerare la loro media come un valore sufficientemente esatto. È notevole la concordanza tra i valori medî delle varie esperienze fatte nello stesso luogo, mentre questi valori sono diversi tra me e il Magnani.

Ma quello che più mi interessa di notare è la variazione avvenuta nel tempo della deglutizione passando da Torino alla Capanna Regina Margherita. Abbiamo, infatti, prendendo la media delle medie:

	a Torino	nella Capanna Regina Margherita
Magnani	5,47 secondi	3,37 secondi
Galeotti	4,67 »	3,60 »

cioè una diminuzione del 39,3 % nel caso del Magnani e del 18,7 % nel mio caso.

Quale può essere la causa di una tal diminuzione? Alla variazione di quali elementi si può essa riferire?

Se analizziamo tutto l'atto della deglutizione, dal momento in cui il bolo alimentare arriva alle fauci e vi determina l'eccitazione per cui il riflesso si compie, si vede subito che il tempo necessario per il percorso del bolo dalle fauci al cardias dipende:

1° dal tempo latente dell'eccitazione;

2° dalla rapidità della contrazione dei muscoli delle fauci e specialmente dei miloioidei che dànno l'impulso al bolo e lo spingono a scendere per il canale esofageo;

3° dalla rapidità e dalla intensità dei movimenti della tunica muscolare esofagea;

4° dalla lunghezza del tragitto da percorrersi, cioè dalla lunghezza dell'esofago.

Di questi quattro fattori, i primi due sono di un ordine di grandezza tanto piccola che le loro variazioni, dato che ve ne siano, non possono importare differenze sensibili nel tempo totale della deglutizione: il 4° fattore resta invariabile per lo stesso individuo. Non resta quindi che il 3°, cioè non resta che ammettere che, per le variate condizioni in cui si trova l'organismo a grandi altezze, cangi anche la motilità della muscolatura esofagea, in dipendenza probabilmente di modificazioni della funzionalità nei centri da cui partono gli impulsi nervosi destinati a questa prima parte del tubo digerente.

Riassumendo possiamo dunque concludere, che in persone che si trovano a grandi altezze sul livello del mare e che si mostrano in condizioni al tutto normali, i centri che presiedono al primo atto della funzione nutritiva sono un po' modificati nelle loro capacità funzionali, inquantochè più presto soggiacciono alla fatica e da altra parte promuovono movimenti più rapidi ed attivi della muscolatura esofagea.

Mineralogia. — *Danburite di S. Barthélemy in Val d'Aosta.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Struever.

Dall'ottimo mio amico Alberto Pelloux, capitano degli alpini e cultore appassionatissimo della mineralogia, ho avuto in esame diversi campioni di minerali da lui stesso raccolti nelle sue molte escursioni in Val d'Aosta. Mi riservo di pubblicare in seguito i risultati dello studio, che ho iniziato sopra alcuni minerali delle miniere di manganese di S. Marcel e di S. Barthélemy; in questo breve scritto credo interessante per ora far conoscere la presenza

in Val d'Aosta di un minerale piuttosto raro, quale la *Danburite*, che fu fino ad ora ritrovato soltanto in pochissime località della terra.

Il campione da me studiato fu raccolto nelle vicinanze degli antichi lavori per l'estrazione del minerale di manganese a S. Barthélemy, lavori ora abbandonati. La danburite si trova insieme con calcite in una piccola vena che attraversa una roccia serpentinosa; anzi i suoi minutissimi cristalli furono liberati in gran parte dall'involucro primitivo di calcite, con l'azione prolungata di acido cloridrico diluito. Per l'abito dei minuti cristallini, per la loro durezza piuttosto elevata, (un po' superiore a 7) e per il fatto di trovarli, per così dire, immersi nella calcite, (modo di giacimento tipico dei cristalli di Russel in S. Lawrence County, New York), fui indotto a supporre che si trattasse di danburite ed a fare quei semplici saggi che mi mostrarono la realtà della mia ipotesi.

Il minerale si presenta in cristalli incolori o giallognoli, con non perfetta trasparenza e con lucentezza un po' grassa. Le loro dimensioni sono piccolissime e assai di rado sono terminati distintamente alla loro estremità. Soltanto la zona dei prismi verticali si presta, benchè non bene, a misure goniometriche ed ho potuto in tal modo accertare la presenza delle forme }100{ }110{ }120{ {140{. Fra queste predomina il prisma }120{ che, come è noto, ha un angolo di 94°,52′, in modo che apparentemente l'abito cristallino sembra dimetrico; carattere questo che è proprio della danburite anche di altre località. Le altre forme della zona verticale sono rappresentate da sottilissime faccettine non sempre presenti; anzi ho notato una disposizione piuttosto asimmetrica di esse, cosicchè tanto il prisma }110{ che quello }140{ si presentano soltanto con due facce parallele.

Delle altre forme poco posso dire con sicurezza, perchè i cristalli, come dissi, sono raramente terminati in modo distinto e quei pochi che lo sono hanno faccettine così piccole e poco lucenti, che non si prestano affatto a misure goniometriche. Con osservazioni al microscopio ho potuto accertare la presenza di un macrodoma, con probabilità quello di simbolo }101{, e di una piramide; se questa sia quella di simbolo }142{ caratteristica della danburite di Piz Valatscha nei Grigioni, non si può affermare. La maggior parte dei cristalli è terminata semplicemente dalla base, ma scabra e poco lucente con l'aspetto più di piano di sfaldatura che di vera faccia. Riassumendo, le forme cristalline della danburite di S. Barthélemy sono le seguenti:

$$\}100\{ . \}001\{ . \}110\{ . \}120\{ . \}140\{ ,$$

alle quali si devono aggiungere un macrodoma, con grande probabilità quello di simbolo }101{, ed una piramide di simbolo non determinabile.

Oltrechè in cristalli, ho osservato danburite compatta a costituire, insieme con calcite, delle venuzze che attraversano la roccia.

Una proprietà ottica caratteristica, e che è estremamente utile per diagnosticare con sicurezza il minerale, è l'uscita quasi perpendicolare sulle facce di }120{, che sono le più sviluppate, di un asse ottico; infatti il piano degli assi ottici nella danburite è parallelo alla base e l'angolo, che essi formano, di poco differisce da quello di detto prisma.

La danburite di S. Barthélemy, come quella di altri giacimenti, riscaldata in tubo chiuso diventa facilmente e distintamente fosforescente con luce rossastra. Presenta, come è naturale, le caratteristiche reazioni del boro. Anzi a questo proposito, dopo aver esperimentato tutte le reazioni, credo utile di osservare che, quando si abbia, come era il caso mio, pochissima quantità di materiale a propria disposizione, il saggio, che consiglierei di adottare fra i tanti conosciuti, perchè riesce più facile e più distinto, è quello di fare il cosidetto etere borico: di attaccare cioè il minerale con acido solforico concentrato, e di unire dell'alcool a cui si dà fuoco; la fiamma presenta allora distintamente il mantello verde caratteristico. Il minerale deve essere però prima sottoposto a fusione, perchè solo in questo caso è attaccabile dall'acido solforico.

In un'altra località italiana fu trovata danburite, cioè nei Monti Cimini (1), ma in condizioni di giacimento assai diverse. Questa di S. Barthélemy si accosta, per il modo di giacimento e specialmente per la sua intima associazione con calcite, alla danburite di Russel (S. Lawrence County, New York), mentre, per l'abito cristallino, sembra ricordare quella di Piz Valatscha (Skopi, Grigioni); ma sulla forma cristallina di essa conto di poter ritornare fra breve, se, come spero, le nuove ricerche che l'amico Pelloux intende di fare, saranno fortunate.

Due dei campioncini studiati sono stati da me offerti in dono al Museo di Mineralogia della R. Università di Roma; un terzo è stato donato dal capitano Pelloux al Museo Civico di Genova.

Rendo grazie al prof. L. Bucca per la gentile ospitalità offertami nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Catania, da lui diretto.

V. C.

(1) Liberto Fantappiè, *La danburite ed altri minerali in alcuni pezzi notevoli di rocce antiche tra i blocchi erratici della Regione Cimina.* Riv. di Min. e Crist. Ital., Padova, 1896, XVI (82-89).

Series A 1904-03-08: Vol 13
Part 1

ARCHIVE